в качестве другого конца $H_2$ (обозначим его $c_2$) — ближайшую слева от $\tilde{a}_{k+1}$ точку этой прямой, содержащуюся в наборе $a_i$, $i=\overline{2, k-1}$.

Если отрезок $\tilde{L}_{k+1}$ расположен на прямой $M_{k+2}$ ниже отверстия $L_{k+2}$, то искомый отрезок $H_2$ лежит на прямой, пересечением которой с $M_{k+2}$ была получена точка $\tilde{b}_{k+1}$. Конец $c_2$ отрезка $H_2$ — точка $\tilde{b}_{k+1}$, другой конец $d_2$ — ближайшая слева от $\tilde{b}_{k+1}$ точка этой прямой, имеющаяся в наборе $b_i$, $i=\overline{2, k-1}$.

Построение отрезка $H_3$ проводится аналогично построению отрезка $H_2$, только вместо точек $c_1$, $d_1$ следует взять точки $c_2$, $d_2$ соответственно, а далее анализу на освещенность необходимо подвергнуть отверстия $L_i$, $i=\overline{k+3, N}$.

Все остальные отрезки $H_j$, $j=\overline{4, n-1}$, последовательно находятся по той же методике. Определение узлов $(\tilde{t}_j, \tilde{V}_j)$ по известным отрезкам $H_j$, $j=\overline{1, n-1}$, описано в п. 3.

5. **Заключение.** Приведенный алгоритм оптимален по эффективности сжатия в классе алгоритмов кусочно-линейной аппроксимации, использующих критерий максимального уклонения при оценке вносимого сжатием искажения отсчетов. Оптимальность становится особенно заметной при высокой динамичности телеметрируемого параметра. Полученное с помощью этой процедуры значение $K_{сж}=K_{max}$ может служить эталоном при определении эффективности сжатия по другим алгоритмам из указанного класса. Процедура достаточно проста в аппаратной реализации, однако требует несколько большего количества действий при обработке одного отсчета, чем обычные апертурные алгоритмы первого порядка [1, 2] (это не относится лишь к алгоритмам среднеквадратической аппроксимации). Поэтому в схеме сжатия желательно применять микропроцессор, обладающий высоким быстродействием и достаточным объемом буферной памяти. Алгоритм хорошо приспособлен к работе в системах с неравномерной дискретизацией [4], может быть использован в системах с предварительным накоплением и последующей ускоренной передачей сжатых сообщений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Ольховский Ю. Б., Новоселов О. Н., Мановцев А. П.** Сжатие данных при телеизмерениях.— М.: Сов. радио, 1971.
2. **Свириденко В. А.** Анализ систем со сжатием данных.— М.: Связь, 1977.
3. **Виттих В. А.** Сжатие данных при экспериментальных исследованиях.— В кн.: Вопросы кибернетики. Сжатие данных.— М.: Сов. радио, 1974.
4. **Гапонов В. А., Томсонс Я. Я.** Об оценке математического ожидания стационарного случайного процесса при неравномерной дискретизации.— В кн.: Алгоритмы обработки и средства автоматизации теплофизического эксперимента. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1978.


*Поступила в редакцию 11 мая 1982 г.*

---

УДК 681.5.015

**О. А. КАЦЮБА, Д. К. ТЮМИКОВ**

*(Куйбышев)*

# АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОМИНАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

**Введение.** В настоящее время благодаря возможностям современных ЦВМ, а также развитию подхода, основанного на использовании дисперсионных функций и дисперсионных отношений [1], стало возможным идентифицировать нелинейные объекты. При этом из-за вычислительных трудностей идентификация нелинейных объектов эффективна лишь при сравнительно небольшом числе входных переменных, так что задача выбора доминантных (существенных) переменных, малое число которых несет большую часть информации о выходной переменной [2], является актуальной для объектов с большой размерностью.

При этом необходимо выбрать такую совокупность переменных, которая в дальнейшем обеспечит получение моделей с требуемой степенью идентичности.

Известные работы по выбору доминантных переменных [2—4] рассматривают главным образом линейные объекты, а предлагаемые в [5—6] методы требуют априорной информации, в частности информации о законах распределения.

В настоящей работе предлагается подход, представляющий двухэтапную процедуру, использующую информацию «вход-выход» нелинейного объекта без предварительных знаний структуры объекта. На первом этапе по информации «вход-выход» оцениваются дисперсионные характеристики, которые в дальнейшем, как это будет показано, используются в качестве весов влияния входных переменных на выходные. На втором этапе на основе упорядоченных весов проводится выбор доминантных переменных с помощью критерия, обеспечивающего максимальную неоднородность ряда весов переменных [7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим статический нелинейный объект с $n$ входными переменными $x=\{x_1, \ldots, x_n\} \in X^n \subset R^n$ и одной выходной переменной $y \in Y \subset R^1$.

Для некоторого $k$ $(k \leqslant n)$ проанализируем всевозможные $k$-мерные подпространства, обозначив их множество через $\{X_{\nu,k}\}$, где $\nu \in \{1, 2, \ldots, l_k\}$ — пронумерованная последовательность сочетаний $k$ индексов из $n$ переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Например, при $n=3$ и $k=2$ элементы множества $\{X_{\nu,k}\}$ таковы:

$$\{X_{\nu,k}\} = \{X_{1,2}=\{x_1, x_2\};\ X_{2,2}=\{x_1, x_3\};\ X_{3,2}=\{x_2, x_3\}\}.$$

Всего подпространств размерностью $k$ будет $l_k = C_n^k$. В общем случае имеем $l=\sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$ подпространств различной размерностью.

Пусть имеют место нелинейные регрессии вида $M[y|X_{\nu,k}]$. «Не вычисляя саму модель» [1], будем характеризовать степень точности описания регрессии числом $g_{\nu,k}=D[M[y|X_{\nu,k}]]/D[y]$ — мерой идентичности.

Величина $g_{\nu,k}$ может служить характеристикой влияния соответствующих переменных подпространств $X_{\nu,k} \subset X^n$ на $y$, определяя тем самым вес $\omega_s$ $(s=\overline{1,l})$ влияния соответствующих сочетаний переменных на выходную переменную.

Если в упорядоченном ряду $\omega_s$ $(\omega_1 > \omega_2 > \ldots > \omega_l)$ выбрать такое $s=m$ [7], чтобы соответствующая индексу $s$ величина $g_{\nu,k}=\omega_s$ удовлетворяла выбранной степени идентичности, а $k<n$, то получим необходимое решение задачи выбора доминантных переменных.

Однако существуют трудности решения поставленной задачи в таком виде: 1) критерии выбора могут иметь самый различный характер (значимость статистических оценок, требуемое значение степени идентичности, вычислительная трудоемкость, экономические требования, ограничения на время работы алгоритма или на требуемую память ЦВМ и т. д.); 2) из-за большой величины $l$ задача теряет практический смысл, хотя в теоретическом плане позволяет провести анализ сочетаний влияния входных переменных на выходную.

Ниже сформулирована теорема, с помощью которой можно обойти указанные трудности, особенно при большом числе $n$. Показано, что при определенных условиях вместо $l$ величин достаточно взять $n$ $(n \ll l)$ парных дисперсионных отношений $g_{\nu,1}$ в качестве весов, а в качестве критерия выбора — критерий неоднородности ранжированного ряда весов.

**Веса переменных на основе парных дисперсионных отношений.**

Среди известных дисперсионных характеристик, используемых в последнее время, наиболее просто вычисляются парные дисперсионные (корреляционные) отношения [1, 2]. Выясним возможности и условия применения этих характеристик для выбора доминантных переменных нелинейных объектов. Для этого величину $g_{\nu,k}$ исследуем более подробно и, следуя [1], воспользуемся соотношением ($D[y] < \infty$)

$$D[y] = M[D[y \mid X_{\nu,k}]] + D[M[y \mid X_{\nu,k}]], \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где второе слагаемое — число, характеризующее долю дисперсии $y$, вносимую переменными $x_r \in X_{\nu,k}$, т. е. $g_{\nu,k}$. Ниже приведем выражение, позволяющее представить эту долю в виде суммы слагаемых, выражающих эффекты взаимодействия $k$, $k-1$, ..., 2 переменных, рассмотренных в соответствующих подпространствах, и эффекты влияния каждой переменной.

Обозначим $n_1(j) = C_n^{n-j}$, $n_2(j, i) = C_{n-j}^{n-j-i}$, $j = \overline{0, n-1}$, $i = \overline{1, n-j}$; $M[y \mid X_{\nu,k}] = M[y]$ при $k = 0$.

*Теорема.* Пусть справедливо соотношение (1), тогда имеет место следующее разложение:

$$D(y) = M\left[(y - M(y \mid X^n))^2\right] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n_1(j)} M\left[\left(M(y \mid X_{\nu,n-j}) + \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\nu'=1}^{n_2(i,j)} (-1)^i M[y \mid X_{\nu',n-j-i}]\right)^2\right] +$$
$$X_{\nu' n-j-i} \subset X_{\nu,n-j}$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n_1(j)} \sum_{j'=0}^{n-1} \sum_{\nu''=1}^{n_1(j)} M\left[\left(M(y \mid X_{\nu,n-j}) + \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\nu'=1}^{n_2(i,j)} (-1)^i \times\right.\right. \tag{2}$$
$$\left.\left.\times M(y \mid X_{\nu',n-j-i})\right)\left(M(y \mid X_{\nu'',n-j'}) + \sum_{i=1}^{n-j'} \sum_{\nu'''=1}^{n_2(i,j)} (-1)^i M(y \mid X_{\nu''',n-j-i})\right)\right];$$
$$X_{\nu''',n-j-i} \subset X_{\nu'',n-j'}, \quad j \neq j' \quad \text{либо} \quad \nu \neq \nu''.$$

Доказательство приведено в приложении.

Следствие 1. Если входные переменные взаимонезависимы, то в разложении (2) отсутствуют смешанные произведения:

$$D[y] = M\left[(y - M[y \mid X^n])^2\right] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n_1(j)} M\left[\left(M[y \mid X_{\nu,n-j}] + \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\nu'=1}^{n_2(j,i)} (-1)^i M[y \mid X_{\nu',n-j-i}]\right)^2\right];$$
$$X_{\nu',n-j-i} \subset X_{\nu,n-j}. \tag{3}$$

Доказательство также дано в приложении.

Второе слагаемое правой части равенства (3) допускает достаточно простую интерпретацию: для $j = 0$ имеем долю дисперсии $y$, вызванную эффектом взаимодействия $n$ переменных; при $j = 1$ будет $l_{n-1} = C_n^{n-1}$ слагаемых, характеризующих долю дисперсии, обусловленную эффектом взаимодействия $(n-1)$ переменных, принадлежащих $\{X_{\nu,n-1}\}$, и т. д.; наконец, при $j = n-1$ получим $n$ слагаемых, выражающих влияние одной переменной $x_r$ ($r = \overline{1, n}$) из $\{X_{\nu,1}\}$ на $y$.

Нетрудно видеть, что, поделив (3) на $D[y]$, найдем дисперсионные отношения в правой части, которые будут характеризовать зависимость $y$ от эффектов взаимодействия различных порядков и сочетаний, а также взаимосвязь $y$ с различными переменными.

Следствие 2. Множественные дисперсионные отношения $\eta^2_{yx^n}$ при независимых входных переменных ограничены снизу величиной $S_n$, определяемой парными дисперсионными отношениями $\eta^2_{yx_r}$:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \eta^2_{yx_r} \leqslant \eta^2_{yx^n}. \tag{4}$$

В силу того что $S_n$ представляет только часть слагаемых $D[M[y|X^n]]/D[y]$, из (3) немедленно следует (4).

Множественные дисперсионные отношения равны величине $S_n$, если эффекты взаимодействия всех порядков равны нулю. Соотношение (4) позволяет достаточно просто оценить величину множественного дисперсионного отношения, а если учесть, что $0 \leqslant \eta^2_{yx^n} \leqslant 1$, то можно определить, достаточно ли для идентификации исследуемого объекта иметь только парные дисперсионные отношения.

В случае получения удовлетворительной величины $S_n \sim 1$, характеризующей нижнюю грань степени идентичности, можно перейти к выбору доминантных переменных на основе весов, определяемых парными дисперсионными отношениями.

В качестве критерия выбора воспользуемся соотношением [7]

$$\min_{1 \leqslant m < n} Q(m) = \min_{1 \leqslant m < n} \left( \frac{1}{n-m} \sum_{r=m+1}^{n} \omega_r \Big/ \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m} \omega_r \right). \tag{5}$$

Пример. Рассмотрим регрессию $M[y|x_1x_2x_3] = f(x_1x_2x_3)$ и проанализируем эффекты взаимодействия и влияния. Разложение (3) будет иметь вид

$$\begin{gathered} D[y] = M[(y - M[y|x_1x_2x_3])^2] + M[(M[y|x_1x_2x_3] - M[y|x_1x_2] - \\ - M[y|x_1x_3] - M[y|x_2x_3] + M[y|x_1] + M[y|x_2] + M[y|x_3] - M[y])^2] + \\ + M[(M[y|x_1x_2] - M[y|x_1] - M[y|x_2] + M[y])^2] + M[(M[y|x_1x_3] - \\ - M[y|x_1] - M[y|x_3] + M[y])^2] + M[(M[y|x_2x_3] - M[y|x_2] - M[y|x_3] + \\ + M[y])^2] + M[(M[y|x_1] - M[y])^2] + M[(M[y|x_2] - M[y])^2] + \\ + M[(M[y|x_3] - M[y])^2]. \end{gathered} \tag{6}$$

Вычислим соответствующие эффекты для зависимостей $f_1(x_1x_2x_3) = 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3^2$ и $f_2(x_1x_2x_3) = (0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3)^2$. Для этого предварительно получим таблицу «вход-выход» $x_r \in [-1, 1]$, $r = \overline{1, 3}$, реализованную по плану полного факторного эксперимента с 5 уровнями и $5^3 = 125$ экспериментами. Затем, используя кусочно-постоянную [1] аппроксимацию $M[y|x_1x_2x_3]$, найдем слагаемые (6) правой части, поделенные на величину $D[y]$. Для первой модели имеем $1 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0{,}03262 + 0{,}5905 + 0{,}3779$, т. е. остаточная дисперсия и эффекты взаимодействия отсутствуют. Для второй модели $1 = 0 + 0 + 0{,}04166 + 0{,}02666 + 0{,}6665 + 0{,}00029 + 0{,}1822 + 0{,}07465$, т. е. отсутствуют остаточная дисперсия и эффект взаимодействия трех переменных. Наибольшая часть дисперсии $y$ падает на эффект взаимодействия 2-й и 3-й переменных.

В примерах с помощью критерия (5) определяются 2-я и 3-я переменные в качестве доминантных с остаточной дисперсией $0{,}03262\,D[y]$ для первой модели и $(0{,}04166 + 0{,}00029)\,D[y]$ — для второй, при этом оценка степени идентичности по парным дисперсионным отношениям будет определена точно для первой модели и занижена — для второй. Однако выбор, как следует из примера, произведен правильно.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Представим (1) в эквивалентной форме:

$$\begin{gathered} D[y] = M\left[(y - M[y|X^n])^2\right] + M\left[(M[y|X^n] - M[y])^2\right] = \\ = M\left[(y - M[y|X^n])^2\right] + \\ + M\left[\left\{\left(M[y|X^n] - \sum_{\nu=1}^{C_n^{n-1}} M[y|X_{\nu,n-1}] + \sum_{\nu=1}^{C_n^{n-2}} M[y|X_{\nu,n-2}] - \ldots + \right.\right.\right. \\ \left. + (-1)^n M[y] \right) + \end{gathered}$$

$$
C_n^{n-1}\text{ строк}\left\{\begin{aligned}
&+\Bigg(M[y\,|\,X_{1,n-1}]-\sum_{\substack{\nu=1\\ X_{\nu,n-2}\subset X_{1,n-1};}}^{C_{n-1}^{n-2}} M[y\,|\,X_{\nu,n-2}]+\sum_{\substack{\nu=1\\ X_{\nu,n-3}\subset X_{1,n-1},\ \ldots}}^{C_{n-1}^{n-3}} M[y\,|\,X_{\nu,n-3}]-\ldots\\
&\ldots+(-1)^{n-1}M[y]\Bigg)+\Bigg(M[y\,|\,X_{2,n-1}]-\sum_{\nu=1}^{C_{n-1}^{n-2}} M[y\,|\,X_{\nu,n-2}]+\\
&+\sum_{\nu=1}^{C_{n-1}^{n-3}} M[y\,|\,X_{\nu,n-3}]-\ldots+(-1)^{n-1}M[y]\Bigg)+\Bigg(M[y\,|\,X_{1,n-2}]-\\
&\qquad X_{\nu,n-2}\subset X_{2,n-1};\quad X_{\nu,n-3}\subset X_{2,n-1},\ \ldots
\end{aligned}\right.
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$
C_n^{n-2}\text{ строк}\left\{\begin{aligned}
&-\sum_{\nu=1}^{C_{n-2}^{n-3}} M[y\,|\,X_{\nu,n-3}]+\sum_{\nu=1}^{C_{n-2}^{n-4}} M[y\,|\,X_{\nu,n-4}]-\ldots+(-1)^{n-2}\times\\
&\qquad X_{\nu,n-3}\subset X_{1,n-2};\quad X_{\nu,n-4}\subset X_{1,n-2},\ \ldots\\
&\times M[y]\Bigg)+\Bigg(M[y\,|\,X_{2,n-2}]-\sum_{\nu=1}^{C_{n-2}^{n-3}} M[y\,|\,X_{\nu,n-3}]+\\
&+\sum_{\nu=1}^{C_{n-2}^{n-4}} M[y\,|\,X_{\nu,n-4}]-\ldots+(-1)^{n-2}M[y]\Bigg)+\\
&\qquad X_{\nu,n-3}\subset X_{2,n-2};\quad X_{\nu,n-4}\subset X_{2,n-2},\ \ldots
\end{aligned}\right.
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$
C_n^{1}\text{ строк}\left\{\begin{aligned}
&+(M[y\,|\,X_{1,1}]-M[y])+\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&+(M[y\,|\,X_{n,1}]-M[y])\}^2].
\end{aligned}\right.
$$

Справедливость этого тождества легко проверить, раскрыв скобки и выполнив соответствующие алгебраические преобразования.

Рассматривая для $D[M(y|X^n)]$ выражения в круглых скобках как единое целое и производя над ними соответствующие операции, получим (1). Теорема доказана.

*Доказательство следствия 1.* Для этого запишем смешанное произведение в общем виде:

$$
M\Bigg[\Bigg(M[y\,|\,X_{\nu,n-j}]+\sum_{i=1}^{n-j}\sum_{\substack{\nu'=1\\ X_{\nu',n-j-i}\subset X_{\nu,n-j},\quad j<j'}}^{n_2(j,i)}(-1)^i M[y\,|\,X_{\nu',n-j-i}]\Bigg)\times
$$
$$
\times\Bigg(M[y\,|\,X_{\nu'',n-j'}]+\sum_{i=1}^{n-j'}\sum_{\substack{\nu'''=1\\ X_{\nu''',n-j'-i}\subset X_{\nu'',n-j'}}}^{n_2(j,i)}(-1)^i M[y\,|\,X_{\nu''',n-j'-i}]\Bigg)\Bigg]. \tag{П1}
$$

Случай 1. Для некоторых фиксированных $n,\ \nu,\ \nu',\ j,\ j'$ имеет место $X_{\nu,n-j}\cap X_{\nu'',n-j}=0$. Воспользовавшись (в силу условия следствия 1) тождеством

$$
\underset{X^n}{M}[(A)(B)]=\underset{X_{\nu,n-j}}{M}[(A)]\underset{X_{\nu'',n-j}}{M}[(B)],
$$

получим, например, для второго сомножителя (П1)

$$
M[y]\Bigg(1+\sum_{i'=1}^{n-j'}\sum_{\nu''=1}^{n_2(j,i)}(-1)^i\chi_{\nu''}\Bigg)=0,
$$

где $\chi_{\nu''}=1$ для всех $\nu''$, что легко проверить.

Случай 2. Для фиксированных $n$, $j$, $j'$, $\nu$, $\nu''$ $(j<j')$ выполняется $X_{\nu,n-j}\supset X_{\nu'',n-j'}$. Тогда в сумме $\sum\limits_{i=1}^{n-j}\sum\limits_{\nu'=1}^{z_2(j,i)}(-1)^i M[y\mid X_{\nu',n-j-i}]$ среди подмножества размерностью $(n-j-i)$ появятся такие $X_{\nu',n-j-i}$, что $X_{\nu',n-j-i}\cap X_{\nu'',n-j'}=0$.

Представим первый сомножитель в виде двух групп слагаемых: во второй группе слагаемых сосредоточены такие $X_{\nu',n-j-i}$, что $X_{\nu',n-j-i}\cap$ $\cap X_{\nu'',n-j'}=0$; в первой группе — все остальные слагаемые, которые можно записать (введя новый индекс $\tilde{\nu}$) в следующем виде:

$$M[y\mid X_{\nu,n-j}]+\sum_{i=1}^{n-j}\sum_{\tilde{\nu}'=1}^{n_2(i,j)-t}(-1)^i M\left[y\mid X_{\tilde{\nu}',n-j-i}\right]+(-1)^{n-j}M(y).$$

$$X_{\tilde{\nu}',n-j-i}\subset X_{\nu,n-j},\quad t=C_{j'-j}^{n-j-i}$$

Произведение второй группы слагаемых на второй сомножитель равно нулю (повторяется первый случай), и тогда

$$M\left[\left(M(y\mid X_{\nu,n-j})+\sum_{i=1}^{n-j}\sum_{\tilde{\nu}'=1}^{n_2(i,j)-t}(-1)^i M\left(y\mid X_{\tilde{\nu}',n-j-i}\right)+(-1)^{n-j}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times M(y)\right)\left(M(y\mid X_{\nu'',n-j'})+\sum_{i=1}^{n-j'}\sum_{\nu'''=1}^{n_2(i,j)}(-1)^i M(y\mid X_{\nu''',n-j'-i})\right)\right]=$$
$$=M[(A_1)(B_1)];\ X_{\tilde{\nu}',n-j-i}\in X_{\nu,n-j},\ X_{\nu''',n-j'-i}\in X_{\nu'',n-j'}.\qquad(\text{П}2)$$

Выражение (П2) можно записать так:

$$M_{x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'})}M_{x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'}\mid x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'})}\times$$
$$\times[(A_1)(B_1)]=M_{x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu',n-j'})}[(B_1)\times$$
$$\times M_{x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'}\mid x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'})}(A_1)].$$

Здесь $\setminus$ обозначает разность двух множеств.

Применяя свойство условных математических ожиданий [8, с. 46], имеем

$$M_{\nu,\ n-j\setminus x_{\nu'',n-j'}\mid x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu'',n-j'})}(A_1)=(-1)^{n-j}M(y).$$

Далее,

$$M_{x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu',n-j'})}\left[(B_1)(-1)^{n-j}M(y)\right]=(-1)^{n-j}M(y)\times$$
$$\times M_{x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu',n-j'})}(B_1).$$

Так как

$$M_{x_{\nu,n-j}\setminus(x_{\nu,n-j}\setminus x_{\nu',n-j'})}(B_1)=0,$$

то случай 2 доказан.

Случай 3. Для фиксированных $n$, $j$, $j'$, $\nu$, $\nu''$ $X_{\nu,n-j}\cap X_{\nu'',n-j'}\neq$ $\neq 0$. Случай доказывается последовательным сведением к случаям 1 и 2.

Следствие 1 доказано.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Райбман Н. С., Чадеев В. М.** Построение моделей процессов производства.— М.: Энергия, 1975.
2. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение.— М.: Наука, 1968.
3. **Лаптев В. Г.** Об алгоритмах выбора существенных переменных в задачах идентификации многомерных объектов.— В кн.: Идентификация: (Докл. II Всесоюз. совещ. по статистическим методам теории управления, Ташкент). М.: Наука, 1970.
4. **Малолеткин Г. Н., Мельников Н. И., Ханин В. М.** Об алгоритмах выбора наилучшего подмножества признаков в регрессионном анализе.— В кн.: Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1978.

5. **Кильдишев Г. С., Аболенцев Ю. И.** Многомерные группировки.— М.: Статистика, 1978.
6. **Елисеева И. И., Рукавишников В. О.** Группировка, корреляция, распознавание образов.— М.: Статистика, 1977, с. 125—135.
7. **Тюмиков Д. К., Кацюба О. А.** О выборе доминантных переменных в задаче идентификации химико-технологических объектов.— В кн.: Автоматизация химических производств. М.: НИИТЭХИМ, 1981, вып. 3.
8. **Дуб Дж.** Вероятностные процессы.— М.: ИЛ, 1956.

*Поступила в редакцию 16 марта 1981 г.;*
*окончательный вариант — 10 октября 1982 г.*

---

УДК 681.32.05

И. В. БЕЛАГО, А. И. ПИНЧУК, М. А. СТАРКОВ
*(Новосибирск)*

# АНАЛИЗАТОР БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В последнее время появилось направление синтаксического (языкового) описания изображений в задачах распознавания образов. Рассматриваемый ниже алгоритм по своей структуре может быть отнесен к алгоритму синтаксического анализа изображений, однако результатом его работы является таблица описания изображений, которая дает информацию для управления процессом обработки в автоматическом и диалоговом режимах.

Введем определения. Пару чисел $(j, k)$, где $j$ и $k$ — целые, будем называть точкой, а множество точек $\{(j-1, k), (j+1, k), (j, k-1), (j, k+1)\}$ — окрестностью $(j, k)$-й точки. Последовательность $(j_1, k_1)$, $(j_2, k_2), \ldots, (j_n, k_n)$ назовем путем, соединяющим точки $(j_1, k_1)$ и $(j_n, k_n)$, если любая рядом стоящая пара точек последовательности принадлежит окрестности друг друга, а значение изображения во всех этих точках равно единице. Две точки будем считать связными, если существует хотя бы один соединяющий их путь. Множество точек назовем объектом (или связной областью), если любые две точки объекта связны.

Определим «дыру» в объекте. Для этого исключим на матрице все объекты, кроме данного. Полной окрестностью $(j, k)$-й точки будет объединение обычной окрестности и множества $\{(j-1, k-1), (j-1, k+1), (j+1, k-1), (j+1, k+1)\}$. Сохраним определения пути, связности и объекта для нового определения окрестности, потребовав равенства нулю всех точек пути. «Дырой» назовем связную область, состоящую из нулей и не имеющую общих точек с границей матрицы (в новом определении окрестности).

Сформулируем задачу. Пусть автомату предъявляется бинарная матрица поэлементно слева направо, сверху вниз. Требуется наделить автомат такой структурой, чтобы после предъявления последней точки изображения в его памяти была сформирована таблица описания объектов (ТО), в которой каждому объекту соответствовал бы столбец, содержащий следующие данные: $a$, $l$ — номера строки и столбца, в которых объект встречается впервые; $b$ — номер строки, в которой объект заканчивается; $c$, $d$ — соответственно крайний левый и крайний правый столбцы, в которых встречается объект; $S$ — площадь объекта (число составляющих его точек); $r$ — число «дыр» в объекте; $x$, $y$ — координаты центра тяжести, определяемые по формулам

$$x = \frac{1}{S}\sum_{(j,k)} j, \quad y = \frac{1}{S}\sum_{(j,k)} k; \tag{1}$$