АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1983

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА

В работах [1—3] изложен метод решения интегральных уравнений Винера — Хопфа, особенно эффективный для решения систем интегральных уравнений, так как в нем отсутствует традиционная процедура факторизации матриц спектральной плотности. Более того, на основе этого метода можно построить алгоритм факторизации матриц спектральной плотности. Однако разработка на его основе машинного алгоритма решения задачи выявила некоторые его недостатки, когда у дробно-рациональной функции, стоящей множителем перед искомой передаточной функцией, имеются кратные или нулевые полюсы либо степень числителя больше степени знаменателя.

В статье предлагается способ, позволяющий преодолеть эти трудности. Интегральное уравнение Винера — Хопфа имеет вид [4]

$$\int_0^\infty R_{\varphi\varphi}(\tau-\lambda)\,K(\lambda)\,d\lambda - R_{m\varphi}(\tau) = 0,\ \ \tau \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $R_{\varphi\varphi}(\tau)$ — корреляционная функция сигнала $\varphi(t)$, состоящего из полезной составляющей $m(t)$ и помехи $n(t)$, т. е. $\varphi(t) = m(t) + n(t)$; $R_{m\varphi}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция сигналов $m(t)$ и $\varphi(t)$. Желаемый оператор воспроизведения полезной составляющей без ограничения общности равен единице.

Предположим, что функции $R(\tau)$ могут быть представлены так:

$$R_{dc}(\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\nu}\sum\limits_{j=0}^{\theta_\nu} a_{ij}^{dc}\tau^j e^{\alpha_i^{dc}\tau} & \text{при } \tau < 0,\ \operatorname{Re}\alpha_i > 0, \\ \sum\limits_{l=1}^{\mu}\sum\limits_{p=0}^{\eta_\mu} b_{lp}^{dc}\tau^p e^{\beta_l^{dc}\tau} + \sum\limits_{q=0}^{\chi} c_k^{dc}\delta^{(q)}(\tau) & \text{при } \tau \geqslant 0,\ \operatorname{Re}\beta_l < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. В плоскости комплексного переменного $R_{dc}(\tau)$ будет соответствовать функция $S_{dc}(s)$:

$$S_{dc}(s) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\theta_\nu}\frac{a_{ij}^{dc}}{\left(s+\alpha_i^{dc}\right)^j} + \sum_{l=1}^{\mu}\sum_{p=0}^{\eta_\mu}\frac{b_{lp}^{dc}}{\left(s+\beta_l^{dc}\right)^p} + \sum_{q=0}^{\chi} c_k^{dc} s^q. \tag{3}$$

С использованием (2), (3) на основе [1] интегральное уравнение в комплексной плоскости перепишется следующим образом:

$$S_{\varphi\varphi}(s)\,K(s) - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\theta_\nu}\frac{a_{ij}^{\varphi\varphi}}{\left(s+\alpha_i^{\varphi\varphi}\right)^j}K^{(j)}\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) - \sum_{l=1}^{\mu}\sum_{p=0}^{\eta_\mu}\frac{b_{lp}^{m\varphi}}{\left(s+\beta_l^{m\varphi}\right)^p} + \sum_{q=0}^{\chi} c_k^{m\varphi}s^q = 0. \tag{4}$$

Из-за того что в правой полуплоскости комплексного переменного имеются кратные корни, в уравнении (4) появились неизвестные постоянные, являющиеся производными от искомой передаточной функции $K(s)$ в некоторых заданных точках $\alpha_i^{\varphi\varphi}$.

Корни, лежащие в начале координат, будем делить на правые и левые в зависимости от того, из какой полуплоскости они попадают в начало координат при стремлении некоторого параметра ε к нулю. Оказалось, что положить $\varepsilon = 0$ можно только на конечной стадии решения. Сохранение этого параметра неопределенным, т. е. $\varepsilon \neq 0$, сильно усложняет алгоритм решения задачи. Необходимо найти такие алгоритмы решения, которые позволят приравнять ε нулю на начальных стадиях решения задачи.

С использованием теоремы Парсеваля

$$K^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty (-\tau)^n K(\tau)\, e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K(s) \left(\frac{1}{\alpha - s}\right)^n ds. \qquad (5)$$

Значение $K(s)$, в которое линейно будут входить неизвестные постоянные $K^{(j)}(\alpha_i^{\varphi\varphi})$, найдено из (4). Эти неизвестные можно определить из системы линейных уравнений, которая получается с помощью соотношения (5):

$$K^{(j)}\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K(s) \left(\frac{1}{\alpha_i^{\varphi\varphi} - s}\right)^j ds, \; i = 1 \div \nu, \; j = 0 \div \Theta_\nu. \qquad (6)$$

Решение интегрального уравнения резко усложняется, что будет показано на примере, когда какие-либо из корней $\alpha_i^{\varphi\varphi}$ находятся в начале координат плоскости комплексного переменного. Если бы не это обстоятельство, то с некоторыми усложнениями алгоритма из-за наличия кратных корней можно было бы примириться и использовать для определения соответствующих неизвестных соотношение (6).

Изложим способ, позволяющий избавиться от кратных и нулевых полюсов функции $S_{\varphi\varphi}(s)$, лежащих в правой полуплоскости. Как видно из (4) и примера, именно кратные и нулевые полюсы справа осложняют решение задачи.

От обеих частей уравнения (1) возьмем преобразование Фурье. Тогда оно запишется так [3]:

$$S_{\varphi\varphi}(s)K(s) - S_{m\varphi}(s) = \Gamma(s), \qquad (7)$$

где $\Gamma(s)$ — неизвестная функция с полюсами в правой полуплоскости комплексного переменного.

Левую и правую часть уравнения (7) умножим на дробно-рациональную функцию

$$\bar{S}_{\varphi\varphi}(s) = A(s)/B(s), \qquad (8)$$

обладающую следующими свойствами: $A(s)$ содержит все кратные и нулевые полюсы функции $S_{\varphi\varphi}(s)$, лежащие в правой полуплоскости комплексного переменного; степени $A(s)$ и $B(s)$ совпадают; функция $B(s)$ не имеет кратных и нулевых корней, все ее корни находятся в правой полуплоскости.

Левую и правую часть (7) умножим на $\bar{S}_{\varphi\varphi}(s)$. В результате получим уравнение

$$\bar{S}_{\varphi\varphi}(s) S_{\varphi\varphi}(s) K(s) - \bar{S}_{\varphi\varphi}(s) S_{h\varphi}(s) = \bar{S}_{\varphi\varphi}(s)\Gamma(s) = \tilde{\Gamma}(s) \qquad (9)$$

или

$$\tilde{S}_{\varphi\varphi}(s)K(s) - \tilde{S}_{h\varphi}(s) = \tilde{\Gamma}(s) \qquad (10)$$

вида (7). Однако дробно-рациональная функция $\tilde{S}_{\varphi\varphi}(s)$, стоящая множителем перед $K(s)$, не будет иметь кратных и нулевых корней в правой полуплоскости комплексного переменного.

Из (10) с помощью обратного преобразования Фурье

$$\int_0^\infty \tilde{R}_{\varphi\varphi}(\tau - \lambda) K(\lambda) d\lambda - \tilde{R}_{h\varphi}(\tau) = 0, \quad \tau \geqslant 0. \qquad (11)$$

Далее из него можно получить уравнение вида (4), корни которого $\alpha_i^{\varphi\varphi}$ уже не будут кратными и не лежат в начале координат плоскости комплексного переменного. Тот же прием можно применить и для решения системы интегральных уравнений. Система интегральных уравнений записывается так [2]:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \omega_{ij}(\lambda)\, R_{\varphi_k\varphi_j}(t - \lambda)\, d\lambda - R_{m_k\varphi_j}(t) = 0 \text{ при } t \geqslant 0 \; (i; k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12)$$

где $R_{\varphi_k\varphi_j}(\lambda) = M[\varphi_k(t)\,\varphi_j(t - \lambda)]$; $R_{m_k\varphi_j}(\lambda) = M[m_k(t)\,\varphi_j(t - \lambda)]$;

$\varphi_k(t)$ — входной сигнал с наложенной на него помехой, приложенный к k-му входу многомерного фильтра; $m_k(t)$ — желаемый выходной сигнал на k-м выходе многомерного фильтра; M — условное обозначение операции математического ожидания.

Возьмем от левой и правой части (12) преобразование Фурье:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij}(s)\, S_{\varphi_k\varphi_j}(s) - S_{m_k\varphi_j}(s) = \Gamma_{ik}(s) \quad (i; k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (13)$$

Здесь $\Gamma_{ik}(s)$ — неизвестные функции с полюсами в правой полуплоскости комплексного переменного.

Обе части соотношения (13) умножим на функцию $S_{ik}(s)$, обладающую следующими свойствами: числитель $S_{ik}(s)$ содержит все кратные и нулевые полюсы функций $S_{\varphi_k\varphi_j}(s)$ ($k = 1 \div m$, $j = 1 \div n$), лежащие в правой полуплоскости комплексного переменного; знаменатель $S_{ik}(s)$ не имеет кратных и нулевых корней, все его корни находятся в правой полуплоскости. В результате

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij}(s)\, S_{\varphi_k\varphi_j}(s)\, S_{ik}(s) - S_{m_k\varphi_j}(s)\, S_{ik}(s) = \Gamma_{ik}(s)\, S_{ik}(s) \tag{14}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij}(s)\, \widetilde{S}_{\varphi_k\varphi_j}(s) - \widetilde{S}_{m_k\varphi_j}(s) = \widetilde{\Gamma}_{ik}(s) \quad (i;\, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{15}$$

В полученной системе уравнений функции $\widetilde{S}_{\varphi_k\varphi_j}(s)$ не содержат кратных и нулевых полюсов.

Некоторые затруднения встречаются при отыскании неизвестных $K(\alpha_i)$. Покажем это на примере одномерного уравнения (11). Так как функция $S_{\varphi\varphi}(s)$ не содержит кратных и нулевых полюсов в правой полуплоскости, а если таковые имеются, то с помощью изложенного выше способа от них можно избавиться, на основе (4) запишем

$$\widetilde{S}_{\varphi\varphi}(s)\, K(s) - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{a_i}{s + \alpha_i^{\varphi\varphi}} K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) - \widetilde{S}_{h\varphi}(s)_+ = 0. \tag{16}$$

Функция $\widetilde{S}_{h\varphi}(s)_+$ имеет полюсы в левой полуплоскости, а $\widetilde{S}_{h\varphi}(s)_-$ — в правой, причем $\widetilde{S}_{h\varphi}(s) = \widetilde{S}_{h\varphi}(s)_+ + \widetilde{S}_{h\varphi}(s)_-$. Из (16)

$$K(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s) \frac{a_i}{s + \alpha_i^{\varphi\varphi}} K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) - \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s)\, \widetilde{S}_{h\varphi}(s)_+ = 0. \tag{17}$$

Запишем систему уравнений для определения $K\left(\alpha_j^{\varphi\varphi}\right)$ [3]:

$$K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K(s) \frac{1}{\alpha_i^{\varphi\varphi} - s}\, ds = \sum_{i=1}^{\nu} K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) a_i \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{s + \alpha_i^{\varphi\varphi}} \frac{1}{\alpha_j^{\varphi\varphi} - s} \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s)\, ds -$$

$$- \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{\alpha_i^{\varphi\varphi} - s} \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s)\, S_{h\varphi}(s)_+\, ds = 0. \tag{18}$$

Может оказаться, что в некоторых подынтегральных дробно-рациональных функциях в (18) степень числителя больше или равна степени знаменателя. В этом случае значение интеграла бесконечно и нахождение неизвестных $K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right)$ невозможно. Чтобы этого избежать, левую и правую часть умножим на известную дробно-рациональную функцию $R(s)$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Полюсы $R(s)$ лежат только в левой полуплоскости. Тогда вместо (18) получим новую систему уравнений:

$$R\left(\alpha_j^{\varphi\varphi}\right) K\left(\alpha_j^{\varphi\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} R(s)\, K(s) \frac{1}{\alpha_j^{\varphi\varphi} - s}\, ds = \sum_{i=1}^{\nu} K\left(\alpha_i^{\varphi\varphi}\right) a_i \frac{1}{2\pi j} \times$$

$$\times \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{s + \alpha_i^{\varphi\varphi}} \frac{1}{\alpha_j^{\varphi\varphi} - s} R(s)\, \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s)\, ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{\alpha_j^{\varphi\varphi} - s} R(s)\, \widetilde{S}_{\varphi\varphi}^{-1}(s)\, S_{h\varphi}(s)_+\, ds = 0. \tag{19}$$

Разность между степенями знаменателя и числителя $R(s)$ подбирается такой, чтобы все интегралы, входящие в (19), сходились.

Пример. Требуется из минимума дисперсии по случайной составляющей и нулевой ошибки по регулярной найти передаточную функцию фильтра. Случайная составляющая — это помеха в виде белого шума единичной интенсивности. Регулярная — полезный сигнал типа единичного скачка a_0.

Прежде чем приступить к решению задачи, выясним, какие ограничения необходимо наложить на передаточную функцию фильтра, чтобы он в стационарном режиме преобразовывал регулярное воздействие с нулевой ошибкой.

Рассмотрим класс регулярных воздействий, достаточно хорошо описываемых на интервале, соизмеримом с временем переходного процесса, полиномом некоторой степени:

$$g(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_r t^r, \tag{П1}$$

$U(s)$ — желаемый оператор воспроизведения $g(t)$, $K(s)$ — искомая передаточная функция. Желаемый оператор может быть физически нереализуемым. Кроме того, он не воспроизводит с минимальной дисперсией случайную составляющую, поэтому в общем случае $K(s) \neq U(s)$.

Запишем изображение ошибки воспроизведения $g(t)$:

$$E(s) = U(s)\,G(s) - K(s)\,G(s) = [U(s) - K(s)] \sum_{i=0}^{r} a_i \frac{i!}{s^{i+1}}. \qquad (\text{П}2)$$

Для того чтобы ошибка в установившемся режиме, т. е. при $t \to \infty$, была равна нулю, необходимо в комплексной плоскости соблюдение равенства

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = [U(s) - K(s)] \sum_{i=0}^{r} a_i \frac{i!}{s^i} = 0, \qquad (\text{П}3)$$

которое возможно, если $U(s) - W(s)$ имеет следующий вид:

$$U(s) - K(s) = s^{r+1}V(s), \qquad (\text{П}4)$$

где $V(s)$ не содержит полюсов в начале координат плоскости комплексного переменного, так как это снизит величину степени s в (П4). Однако если у функции $V(s)$ нет полюсов в начале координат и на мнимой оси, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |V(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s^{r+1}} [U(s) - K(s)] \right|^2 ds = c < \infty. \qquad (\text{П}5)$$

Таким образом, (П5) есть ограничение, которое необходимо наложить на искомую передаточную функцию $K(s)$, чтобы ошибка воспроизведения сигнала $g(t)$ в установившемся режиме была равна нулю. Передаточная функция ищется из минимума ошибки по случайной составляющей при ограничении (П5). Это типичная задача на условный экстремум. С учетом этого ограничения уравнение (7) приобретает такую форму:

$$\{S_{\varphi\varphi}(s) + \gamma/(\varepsilon + s)^{r+1}(\varepsilon - s)^{r+1}\}K(s) - \{S_{m\varphi}(s) + (\gamma/(\varepsilon + s)^{r+1}(\varepsilon - s)^{r+1}) \times$$
$$\times U(s)\} = \Gamma(s), \qquad (\text{П}6)$$

γ — множитель Лагранжа, ε — бесконечно малая величина.

Для решаемой задачи $r = 0$, $S_{\varphi\varphi}(s) = S_{nn}(s) = 1$, $S_{m\varphi}(s) = 0$, $U(s) = 1$, так что уравнение (П6) имеет вид

$$\{1 + [\gamma/(\varepsilon + s)(\varepsilon - s)]\}K(s) - [\gamma/(\varepsilon + s)(\varepsilon - s)] = \Gamma(s), \qquad (\text{П}7)$$

откуда по аналогии с (4)

$$\frac{\varepsilon^2 + \gamma - s^2}{\varepsilon^2 - s^2} K(s) - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon - s} K(\varepsilon) - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon + s} = 0. \qquad (\text{П}8)$$

Таким образом,

$$K(s) = \frac{\gamma}{2\varepsilon} \frac{(1 + K(\varepsilon))\,\varepsilon - (1 - K(\varepsilon))\,s}{(\varepsilon^2 + \gamma) - s^2} = \frac{\gamma}{2\varepsilon}(1 - K(\varepsilon)) \frac{[(1 + K(\varepsilon))/(1 - K(\varepsilon))]\,\varepsilon - s}{(\varepsilon^2 + \gamma) - s^2} \qquad (\text{П}9)$$

а из соотношения (6)

$$K(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K(s) \frac{1}{\varepsilon - s} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\gamma}{2\varepsilon} \frac{(1 + K(\varepsilon))\,\varepsilon - (1 - K(\varepsilon))\,s}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma} - s\right)\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma} + s\right)(\varepsilon - s)} \times$$
$$\times ds = \frac{\gamma}{2\varepsilon} \frac{(1 + K(\varepsilon))\,\varepsilon - (1 - K(\varepsilon))\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma} + \varepsilon\right)}.$$

Отсюда

$$K(\varepsilon) = \gamma[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}]/[\varepsilon(4\varepsilon^2 + 3\gamma) + (4\varepsilon^2 + \gamma)\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}],$$
$$1 + K(\varepsilon) = [4\varepsilon^3 + 4\varepsilon\gamma + (4\varepsilon^2 + 2\gamma)\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}]/[\varepsilon(4\varepsilon^2 + 3\gamma) + (4\varepsilon^2 + \gamma)\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}], \qquad (\text{П}10)$$
$$1 - K(\varepsilon) = [4\varepsilon^3 + 2\varepsilon\gamma + 4\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}]/[\varepsilon(4\varepsilon^2 + 3\gamma) + (4\varepsilon^2 + \gamma)\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}],$$
$$[(1 + K(\varepsilon))/(1 - K(\varepsilon))]\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}(2\varepsilon^2 + \gamma + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma})/[2\varepsilon^2 + \gamma + 2\varepsilon \times$$
$$\times \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma}] = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma},$$
$$(\gamma/2\varepsilon)(1 - K(\varepsilon)) = \gamma[(2\varepsilon^2 + \gamma + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma})/(\varepsilon(4\varepsilon^2 + 3\gamma) + (4\varepsilon^2 + \gamma) \times$$
$$\times \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma})] = \gamma/(\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma} + \varepsilon).$$

Окончательно $K(s) = [\gamma/(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma}+\varepsilon)]\,[1/(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma}+s)]$. При $\varepsilon = 0$ $K(s) = \sqrt{\gamma}/(\sqrt{\gamma}+s)$. Множитель Лагранжа γ выбирается из условия обеспечения заданного качества в переходном режиме.

Эту задачу решим с использованием предлагаемого в статье способа. Левую и правую часть (П7) умножим на $(\varepsilon - s)/(a - s)$. Для определенности положим $a = 1$. В результате

$$[(\varepsilon^2+\gamma-s^2)/(\varepsilon+s)(1-s)]K(s) - \gamma/(\varepsilon+s)(1-s) = \Gamma(s)[(\varepsilon-s)/(1-s)] \qquad (\text{П12})$$

или, используя (4),

$$[(\gamma-s^2)/s(1-s)]K(s) - [(\gamma-1)/(1-s)]K(1) - \gamma/s = 0. \qquad (\text{П13})$$

Здесь ε можно уже приравнять нулю. Из (П13)

$$K(s) = [(\gamma-1)K(1)s + \gamma - \gamma s]/(\gamma - s^2). \qquad (\text{П14})$$

Определим

$$K(1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} K(s)\frac{1}{1-s}\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(\gamma-1)K(1)s+\gamma(1-s)}{(s-\sqrt{\gamma})(s+\sqrt{\gamma})(s-1)}\,ds =$$

$$= \frac{-(\gamma-1)K(1)\sqrt{\gamma}+\gamma(1+\sqrt{\gamma})}{2\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}+1)},$$

откуда

$$K(1) = \sqrt{\gamma}/(\sqrt{\gamma}+1). \qquad (\text{П15})$$

Подставляя (П15) в (П14), $K(s) = \sqrt{\gamma}/(\sqrt{\gamma}+s)$. Эту задачу можно решить еще проще, если принять $a = \sqrt{\varepsilon^2+\gamma}$. Уравнение (П12) для этого значения a упрощается:

$$[(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma}+s)/(\varepsilon+s)]K(s) - \gamma/(\varepsilon+s)(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma}-s) =$$
$$= \Gamma(s)[(\varepsilon-s)/(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma}-s)]. \qquad (\text{П16})$$

Используя (4), из (П16) найдем $(\sqrt{\gamma}+s)K(s)/s - \sqrt{\gamma}/s = 0$, откуда $K(s) = \sqrt{\gamma}/(\sqrt{\gamma}+s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зотов М. Г. Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом.— Автометрия, 1972, № 1.
2. Зотов М. Г. Решение систем интегральных уравнений при оптимальном синтезе многомерных систем.— Автометрия, 1973, № 4.
3. Зотов М. Г. Об одном способе определения неизвестных параметров при решении интегральных уравнений операционным методом.— Автометрия, 1975, № 4.
4. Ньютон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф. Теория линейных следящих систем.— М.: Физматгиз, 1968.

Поступило в редакцию 26 апреля 1982 г.

УДК 621.373.826 : 772.99

Е. Ф. ОЧИН

(Ленинград)

ЧЕТЫРЕХВЕКТОРНОЕ (2×2) АМПЛИТУДНОЕ КОДИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫХ ФИЛЬТРОВ

Заданная передаточная функция когерентного оптического процессора пространственно-частотной фильтрации реализуется в общем виде как комплексный пространственно-частотный фильтр

$$H(x, y) = a(x, y)\exp[i\varphi(x, y)]. \qquad (1)$$

Здесь $-1 \leqslant a(x, y) \leqslant 1$ — функция амплитудной модуляции, $\varphi(x, y)$ — фазовой модуляции.

Фильтр (1) можно представить в виде двумерной структуры, состоящей из двух слоев. Первый слой является неотрицательным амплитудным модулятором: