АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1983

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ
(Ижевск)

УСЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ИЛИ ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Среди известных методов цифровой обработки сигналов спектральный анализ по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) занял важное место в различных областях научных исследований и при решении практических задач [1, 2]. Например, в задачах цифровой фильтрации дискретное преобразование Фурье (ДПФ) находит применение для вычисления апериодической свертки или корреляции, в медицине и физиологических исследованиях — для анализа различных биологических сигналов: электрокардиограмм, электроэнцефалограмм, в задачах интерполяции функций [3, 4].

При спектральном анализе дискретных сигналов часто применяется искусственное увеличение интервала определения за счет добавления нулевых отсчетов либо во временной области, либо в частотной. В частности, при вычислении апериодической свертки сигнал дополняют нулевыми отсчетами во временной области, так как уменьшается эффект межпериодной интерференции, возникающей за счет циркуляции перемещаемого ядра от одного периода к другому, а при интерполяции функций дополнение нулевыми отсчетами проводят в частотной области и с помощью обратного ДПФ доопределяют сигнал между уже известными отсчетами. В работе [2] рассмотрено видоизменение базисных систем функций Виленкина — Крестенсона (ВКФ) для дискретных сигналов, подвергшихся такому преобразованию. Показано, что для систем ВКФ, заданных на интервале $N=m^n$ ($n=l+k$, l, k — целые числа; m — основание системы счисления), дополнение дискретного сигнала нулевыми отсчетами во временной области или удаление m^n-m^l столбцов для матрицы ВКФ — Кронекера приводит к периодическому повторению строк m^k раз, а для ВКФ — Пэли — к k-кратному повторению каждой строки. Для ДЭФ полученные результаты не могут быть применены, так как они, что справедливо отмечено в [2], теряют смысл при $m=N$.

Задача данной работы — определение видоизменения базисной системы ДЭФ при разложении дискретных сигналов, дополненных нулевыми отсчетами во временной или частотной области.

Дискретный сигнал $x(n)$, $n=\overline{0,\ N-1}$, можно представить в виде вектора $\mathbf{X}_N=[x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(N-1)]^T$ N-мерного линейного пространства, который может быть разложен по ортогональному дискретному базису Фурье:

$$\mathbf{S}_N=(1/N)F_N\mathbf{X}_N, \tag{1}$$

где $\mathbf{S}_N=[S(0),\ S(1),\ \ldots,\ S(N-1)]^T$ — вектор коэффициентов разложения $\mathbf{X}_N$ в дискретном базисе Фурье; F_N — матрица ДЭФ размерностью N:

$$\{\mathrm{def}\,(k,\ n)\}\to F_N = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & \ldots & (N-1) \end{array}\ \ n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \ldots & W_N^{(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)} \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}, \tag{2}$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/N).$$

Матрица ДЭФ F_N является симметрической и унитарной, поэтому обратное преобразование по отношению к (1) определяется сопряженной матрицей $F_N^* = F_N^{-1}$:

$$\mathbf{X}_N = F_N^*\mathbf{S}_N = F_N^{-1}\mathbf{S}_N. \tag{3}$$

Формулами (1) и (3) задаются в матричной форме прямое и обратное ДПФ соответственно.

Пусть дискретная функция $x(n)$, $n = \overline{0,\ N-1}$, содержит $N(r-1)/r$ нулей, $N/r = M$ — целое число. Как уже отмечалось, такое преобразование применяется для вычисления апериодической свертки. Представим такую дискретную функцию в виде вектора

$$\mathbf{X}_{M,0} = [x(0),\, x(1),\, \ldots,\, x(M-1),\ \underbrace{0,\, \ldots,\, 0}_{N(r-1)/r}]^T.$$

Вычисление ДПФ $\mathbf{X}_{M,0}$, согласно (1), равносильно усечению $N(r-1)/r$ столбцов матрицы F_N, т. е. превращению ее из квадратной в прямоугольную:

$$C_{N\times M} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \ldots & (M-1) \end{array}\ \ n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & W_M^{1/r} & \ldots & W_M^{(M-1)/r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & W_M^{(N-1)/r} & \ldots & W_M^{((N-1)/r)(M-1)} \\ & & & \end{bmatrix} \end{array},$$

$$W_M = \exp(-j2\pi/M).$$

Проанализируем структуру матрицы $C_{N\times M}$. Обозначим множество номеров строк матрицы $C_{N\times M}$ через A: $A = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (N-1)\}$. Применим к множеству A отношение сравнимости по модулю r. В силу того что это отношение является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, оно разбивает множество A на r классов вычетов по модулю r. Действительно, элементы множества A есть целые числа, а два числа a и b принадлежат одному подмножеству вычетов тогда и только тогда, когда они равноостаточны по модулю r. Однако остаток может принимать ровно r значений: 0, $1/r, \ldots, (r-1)/r$, поэтому и число вычетов по модулю r равно r. Число же элементов в каждом классе равно M, так как $N/r = M$ — целое число. Следовательно, множество A оказывается разбитым на r подмножеств:

$$\begin{aligned} &A_0 = \{0,\ r,\ \ldots,\ r(M-1)\}, \\ &A_1 = \{1,\ r+1,\ \ldots,\ r(M-1)+1\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_{r-1} = \{r-1,\ r+(r-1),\ \ldots,\ r(M-1)+(r-1)\}; \\ &A_i \neq \varnothing;\ A_i \bigcap_{i\neq j} A_j = \varnothing;\ \bigcup_{i=0}^{r-1} A_i = A. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя полученное разбиение, представим матрицу $C_{N\times M}$ в виде r квадратных матриц, размерность каждой из которых M, а номера элементов строк являются классами вычетов по модулю r (4):

$$F_{M,\Theta} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \cdot\cdot & (M-1) & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (M-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_M^{\Theta} & \cdot\cdot & W_M^{\Theta(M-1)} \\ 1 & W_M^{(1+\Theta)} & \cdot\cdot & W_M^{(1+\Theta)(M-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & W_M^{(M-1+\Theta)} & \cdot\cdot & W_M^{(M-1+\Theta)(M-1)} \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}, \quad (5)$$

где $\Theta = 0,\ 1/r,\ \ldots,\ (r-1)/r$.

Рассмотрим видоизменение базисной системы функций ДЭФ при дополнении нулевыми отсчетами $\mathbf{S}_N$ — вектора коэффициентов разложения $\mathbf{X}_n$:

$$\mathbf{S}_{Nr} = [S(0), S(1), \ldots, S(N/2-1), \underbrace{0, \ldots, 0}_{N(r-1)}, S(N/2), \ldots, S(N-1)]^T. \quad (6)$$

Отметим, что дополнение вектора $\mathbf{S}_N$ нулевыми отсчетами в частотной области вида (6) применяется в задачах интерполяции функций [1]. Вычисление интерполируемой дискретной функции $\mathbf{X}_{Nr}$, согласно формуле (3), приводит к усечению столбцов матрицы F^*_{Nr}, т. е. превращению ее из квадратной в прямоугольную. Учитывая свойство N-периодичности ДЭФ, усеченная матрица может быть представлена так:

$$D_{Nr\times N} =$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & \cdot & N/2-1 & N/2+N(r-1) & \cdot & Nr-1 \quad k \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Nr-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & W_N^{-1/r} & \cdot & W_N^{(1-N/2)/r} & W_N^{(N/2-Nr)/r} & \cdot & W_N^{(N+1-Nr)/r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{(1-Nr)/r} & \cdot & W_N^{(1-N/2)(Nr-1)/r} & W_N^{(1-Nr)(Nr-N/2)/r} & \cdot & W_N^{(1-Nr)(Nr-N-1)/r} \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array},$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/N).$$

Аналогично предыдущему, применив к множеству строк этой матрицы операцию сравнения по модулю r, получим такие r подмножеств классов вычетов по модулю r, мощность каждого из которых равна N. Используя полученное разбиение, матрицу $D_{Nr\times N}$ можно представить в следующей форме:

$$F^*_{N,\Theta} =$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & \cdot\cdot & N/2-1 & N/2 & \cdot & N-1 \quad k \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ N-1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-\Theta} & \cdot & W_N^{-\Theta(N/2-1)} & W_N^{-\Theta(N/2)}c_0 & \cdot & W_N^{-\Theta(N-1)}c_0 \\ 1 & W_N^{-(1+\Theta)} & \cdot & W_N^{-(1+\Theta)(N/2-1)} & W_N^{-(1+\Theta)N/2}c_1 & \cdot & W_N^{-(1+\Theta)(N-1)}c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{-(N-1+\Theta)} & & W_N^{-(N-1+\Theta)(N/2-1)} & W_N^{(N-1-\Theta)N/2}c_{N-1} & \cdot & W_N^{-(N-1+\Theta)(N-1)}c_{N-1} \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array}, \quad (7)$$

где $\Theta = 0,\ 1/r,\ \ldots,\ (r-1)/r;\ c_i = W_N^{-N(r-1)\Theta}$ для $\forall i \in \overline{0,\ N-1}$.

Дискретные экспоненциальные функции вида

$$W_N^{(m+\Theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(m+\Theta)l\right]$$

назовем параметрическими дискретными экспоненциальными функциями

(ДЭФ-П) — def $p(m, l, \Theta)$. ДЭФ-П являются обобщением обычных ДЭФ и равны им при $\Theta = 0$. Матрицы $F_{M,\Theta}$ и $F^*_{N,\Theta}$ состоят соответственно из ДЭФ-П при $m = k$, $l = n$, $N = M$ и комплексно сопряженных ДЭФ-П при $m = n$, $l = k$.

Перечислим основные свойства ДЭФ-П. ДЭФ-П не является функцией двух равноправных переменных m и l. В этом основное отличие

Среднее значение ДЭФ-П при $l \neq 0$ равно нулю по переменной m и не равно нулю по переменной l. Действительно,

$$\sum_{m=0}^{N-1} \operatorname{def} p(m, l, \Theta) = W_N^{\Theta l} \frac{1 - W_N^{lN}}{1 - W_N^{l}} = 0 \quad \text{при} \quad l \neq 0;$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{def} p(m, l, \Theta) = \frac{1 - W_N^{(p+\Theta)N}}{1 - W_N^{(p+\Theta)}} \neq 0.$$

Система ДЭФ-П ортогональна по обеим переменным:

$$\sum_{l=0}^{N-1} \operatorname{def} p(m, l, \Theta) \operatorname{def}^* p(p, l, \Theta) = \frac{1 - W_N^{-(p-m)lN}}{1 - W_N^{-(p-m)l}} = \begin{cases} N & \text{при } m = p; \\ 0 & \text{при } m \neq p; \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \operatorname{def} p(m, l, \Theta) \operatorname{def}^* p(m, k, \Theta) = W_N^{-\Theta(k-l)} \frac{1 - W_N^{-(k-l)pN}}{1 - W_N^{-(k-l)p}} = \begin{cases} N & \text{при } k = l; \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Система ДЭФ-П так же, как ДЭФ, является полной системой, так как число линейно-независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов, т. е. N.

Разложение по базисной системе ДЭФ-П определим как параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П), которое при дополнении дискретного сигнала нулевыми отсчетами во временной области имеет вид

$$\mathbf{S}_{M,\Theta} = (1/M)\, F_{M,\Theta} \mathbf{X}_M, \quad 0 \leqslant \Theta < 1; \tag{8}$$

$$\mathbf{X}_M = (F^T_{M,\Theta})^* \mathbf{S}_{M,\Theta}, \tag{9}$$

а при дополнении нулевыми отсчетами в частотной области определяется так:

$$\mathbf{X}_{N,\Theta} = (1/N)\, F^*_{N,\Theta} \mathbf{S}_N, \quad 0 \leqslant \Theta < 1; \tag{10}$$

$$\mathbf{S}_N = F^T_{N,\Theta} \mathbf{X}_{N,\Theta}. \tag{11}$$

Матричные выражения (9) и (11) задают обратные ДПФ-П по отношению к (8) и (10) соответственно. Действительно,

$$F_{M,\Theta} \mathbf{X}_M = F_{M,\Theta} (F^T_{M,\Theta})^* \mathbf{S}_{M,\Theta} = M \mathbf{S}_{M,\Theta};$$

$$F^*_{N,\Theta} \mathbf{S}_N = F^*_{N,\Theta} F^T_{N,\Theta} \mathbf{X}_{N,\Theta} = N \mathbf{X}_{N,\Theta}.$$

Прямое вычисление ДПФ-П, как и обычное ДПФ, требует N^2 комплексных сложений и умножений, что неприемлемо с практической точки зрения. При построении быстрых алгоритмов вычислений ДПФ (БПФ) возможны два равноправных метода: прореживания по времени и частоте. При построении же быстрых алгоритмов вычисления ДПФ-П (БПФ-П) несимметричность матриц $F^*_{N,\Theta}$ и $F_{M,\Theta}$ приводит к тому, что для реализации формулы (9) целесообразен метод прореживания по частоте, а при вычислении по формуле (8) — прореживания по времени.

Однако матрицы $F^*_{N,\Theta}$ и $F_{M,\Theta}$ по структуре таковы, что излагаемый ниже алгоритм БПФ-П, построенный прореживанием по времени, применим и для вычислений по формуле (10), если значения поворачивающих множителей сменить на комплексно-сопряженные и на вход алгоритма подать $\mathbf{S}_N$.

Пусть задана исходная дискретная функция $x(n)$, $n=\overline{0,\ M-1}$, $M=2^p$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$. Разделим исходную последовательность $x(n)$ на две $M/2$-точечные подпоследовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$, которые состоят из четных и нечетных членов $x(n)$ соответственно:

$$x_1(n)=x(2n),\ x_2(n)=x(2n+1),\ n=\overline{0,\ M/2-1}.$$

ДПФ-П последовательности $x(n)$, согласно матричному соотношению (8), можно представить в следующем виде:

$$S(k,\Theta)=\sum_{n=0}^{M/2-1} x(2n)\,W_M^{2n\Theta}W_M^{2nk}+\sum_{n=0}^{M/2-1} x(2n+1)\,W_M^{(2n+1)\Theta}W_M^{(2n+1)k}.$$

С учетом того, что $W_M^2=W_{M/2}$, получим

$$S(k,\Theta)=\sum_{n=0}^{M/2-1} x_1(n)\,W_M^{2n\Theta}W_{M/2}^{nk}+W_M^kW_M^{\Theta}\sum_{n=0}^{M/2-1} x_2(n)\,W_M^{2n\Theta}W_{M/2}^{nk}.$$

Итак, преобразование $S(k,\ \Theta)$ может быть получено из двух последовательностей:

$$S(k,\Theta)=S_1(k,\Theta)+W_M^kW_M^{\Theta}S_2(k,\Theta),\quad k=\overline{0,\ M/2-1},\tag{12}$$

где $S_1(k,\ \Theta)$, $S_2(k,\ \Theta)$ — ДПФ-П последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

Так как $W_M^{k+(M/2)}=-W_M^k$, для $k\geqslant M/2$ имеем

$$S(k,\Theta)=S_1(k-(M/2),\Theta)-W_M^{k-(M/2)}W_M^{\Theta}S_2(k-(M/2),\Theta).\tag{13}$$

Данная процедура может быть продолжена до получения двухточечных ДПФ-П. Из формул (12) и (13) непосредственно следует, что для вычисления ДПФ-П необходимо переформировать таблицу поворачивающих множителей стандартного БПФ в соответствии с выражением

$$W_{M,i}^{\text{П}}=W_{M,i}W_M^{M\Theta/2^i}.\tag{14}$$

Здесь i — номер слоя БПФ; $W_{M,i}$ — поворачивающие множители i-го слоя БПФ; $W_{M,i}^{\text{п}}$ — переформированные поворачивающие множители i-го слоя БПФ-П.

Заметим, что существующие алгоритмы БПФ являются частным случаем алгоритма БПФ-П при $\Theta=0$.

Граф БПФ-П, иллюстрирующий вычисления, приведен на рис. 1.

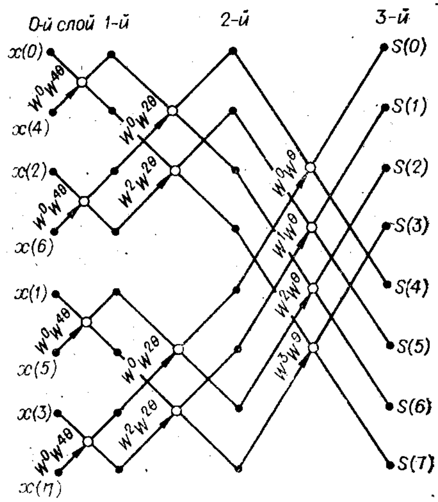

Рис. 1.

Полученные результаты могут быть использованы, например, при интерполяции функций, когда задача состоит в нахождении сигнала между уже известными отсчетами. Предполагая, что заданная дискретная функция $x(n)$, $n=\overline{0,\ N-1}$, представляет один период периодической ограниченной по частоте функции, ее можно оценить в r раз большем количестве точек. Для этого необходимо выполнить прямое N-точечное ДПФ ($N\log_2 N$ комплексных умножений и сложений), дополнить $N(r-1)$ нулями полученный вектор коэффициентов Фурье $\mathbf{S}_N$, согласно (9), и выполнить обратное ДПФ

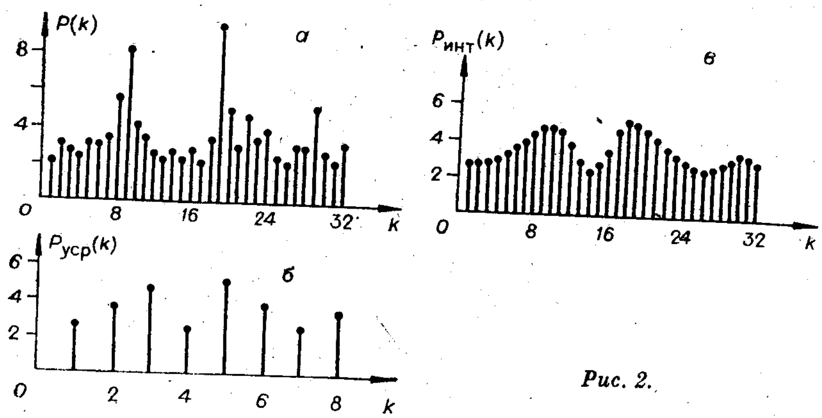

Рис. 2.

($(Nr)\log_2(Nr)$ комплексных умножений и сложений). Общее число выполняемых операций

$$T_{ДПФ} = N\log_2 N + (Nr)\log_2(Nr). \tag{15}$$

Используя выражения (8) и (10), значения интерполируемой функции можно определить с помощью параметрического дискретного преобразования Фурье, во-первых, существенно сократив число операций

$$T_{ДПФ\text{-}п} = (Nr)\log_2 N, \tag{16}$$

во-вторых, уменьшив требуемый объем памяти в r раз.

Для иллюстрации рассмотрим процесс интерполяции оценки энергетического спектра акустического шума судового двигателя, заданного $N=32$ отсчетами. На рис. 2, *а* представлена исходная периодограмма $P(k)$. На рис. 2, *б* приведены усредненные значения $P(k)$, полученные с помощью прямоугольного окна в четыре отсчета. Вычисления интерполируемых значений оценки энергетического спектра с использованием формул (8) и (10) дают в результате значения $P_{инт}(k)$, представленные на рис. 2, *в*. Следует отметить, что оценка энергетического спектра с помощью интерполяции является более эффективной, чем оценка текущим сглаживанием, так как, во-первых, появляется возможность варьировать число отсчетов в окне и тем самым уменьшать влияние пиков периодограммы, вызванных присутствием мощных гармонических компонент в шуме, во-вторых, требуется выполнить меньшее число вычислений.

Таким образом, использование предложенного параметрического дискретного преобразования Фурье позволяет осуществить анализ дискретных сигналов, дополненных нулевыми отсчетами во временной или частотной области, используя разложение по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971, т. 1; 1972, т. 2.
2. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М: Сов. радио, 1975.
3. **Голд Б., Рэйдер Ч.** Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.
4. **Мамонтова Л. А., Пономарев В. А., Попечителев Е. П.** Матричные операторы связи дискретных спектров Фурье и Уолша.— Автометрия, 1977, № 1.

Поступила в редакцию 9 июля 1981 г.