ИТЕРАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В настоящее время задача оценивания спектральной плотности случайного процесса по его выборке широко обсуждается в литературе [1, 2]. Для ее решения имеются методы, многие из которых основаны на вычислении периодограммы (квадрата модуля преобразования Фурье) и последующем сглаживании с весовой функцией, называемой спектральным окном [3]. В большинстве работ в качестве критерия оптимальности выбора весовой функции выступает минимум среднеквадратической ошибки. Однако на малую полезность критериев оптимальности в практическом спектральном анализе указано еще в [3]. Прежде всего это связано с тем, что получаемое решение, как правило, зависит от вида спектральной плотности, т. е. практически неприменимо. Кроме того, в работе [3], а также в [4] показано, что форма спектрального окна в пределах определенного класса функций не оказывает существенного влияния на свойства оценки, которые определяются в основном шириной спектрального окна. В качестве альтернативы критериям оптимальности в [3] развит эмпирический метод стягивания и формирования окна, позволяющий при некоторых условиях удовлетворительно провести спектральный анализ. Однако существует еще один момент, на который следует обратить внимание. Так, в [2] построена оценка спектральной плотности нормальной последовательности, которая дает среднеквадратическую ошибку в лучшем случае порядка величины, обратной длительности выборки, а в [1] показано, что этот результат является неулучшаемым. Интуитивно понятно, что такая ситуация имеет место в общем случае и, следовательно, зачастую длительность наблюдения будет малой для получения сколько-нибудь значимых выводов из спектрального анализа. Таким образом, желательно, чтобы методы оценивания, развиваемые на основе критериев оптимальности, были не столь сильно зависимы от вида спектральной плотности и длины выборки, как для существующих методов. Ниже предлагается метод оценивания на основе критерия минимума среднеквадратической ошибки, удовлетворяющий этим условиям.

Критерий оптимальности и уравнение для спектрального окна. Пусть $x(t)$ — стационарный случайный процесс, наблюдаемый на интервале $[-T/2,\ T/2]$, имеющий спектральную плотность $F(\omega)$; ω принимает значения на всей действительной оси. Определим оценку $\hat{F}$ спектральной плотности в виде

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, \lambda)\, S(\lambda)\, S(\lambda + \Delta)\, d\lambda, \tag{1}$$

где $S(\lambda) = \xi(\lambda) + \eta(\lambda)$, $\xi(\lambda) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \lambda t dt/\sqrt{T}$, $\eta(\lambda) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \times$ $\times \sin \lambda t dt/\sqrt{T}$, $h(\omega, \lambda)$ — спектральное окно; Δ — некоторый сдвиг по частоте.

Предлагаемая оценка (1) отличается от известных наличием $\Delta \neq 0$, что дает дополнительную степень свободы в выборе оптимального спектрального окна. Среднеквадратическая ошибка при этом определяется соотношением

$$\varepsilon^2(\omega) = M(\hat{F}(\omega) - F(\omega))^2, \tag{2}$$

M — операция статистического усреднения. Справедлива следующая теорема относительно выбора оптимального спектрального окна.

Теорема 1. Оптимальное спектральное окно h_0, доставляющее минимум среднеквадратической ошибки, удовлетворяет уравнению

$$F(\omega) MS(\lambda) S(\lambda + \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\omega, \lambda') MS(\lambda) S(\lambda + \Delta) S(\lambda') S(\lambda' + \Delta) d\lambda'. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $h(\omega, \lambda) = h_0(\omega, \lambda) + c\varphi(\omega, \lambda)$, где h, φ — произвольные функции, c — постоянная. Тогда, подставляя h в (2), получим условие оптимальности для h_0 в виде $d/dc(\varepsilon^2)|_{c=0} = 0$. Последнее выполняется, если h_0 удовлетворяет уравнению (3). При этом ошибка достигает минимума, так как

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial c^2} = 2M\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \lambda) S(\lambda) S(\lambda + \Delta) d\lambda\right)^2 \geqslant 0.$$

Ошибка, соответствующая оптимальной оценке, определяется из (2) при подстановке $h = h_0$ с учетом уравнения (3):

$$\varepsilon^2(\omega) = F^2(\omega) - F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\omega, \lambda) MS(\lambda) S(\lambda + \Delta) d\lambda. \tag{4}$$

Корреляционные свойства функций S. Уравнение (3) для корреляционного окна содержит второй и четвертый моменты функции S, свойства которых исследуются ниже. Основным результатом является содержание следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым матожиданием и корреляционной функцией $B(\tau)$, наблюдаемый на интервале $[-T/2, T/2]$ и имеющий время корреляции $\tau_0 < T$. Тогда

1) $M\xi\eta = 0$,

2) $$MS_1S_2 = \frac{\sin(\omega^- T/2)}{\omega^- T}(F_2 + F_1) + \frac{\cos(\omega^- T/2)}{\omega^- T}(G_2 - G_1), \tag{5}$$

где $F_i = F(\omega_i) = \int_{-T}^{T} B(\tau)\cos\omega_i\tau d\tau$, $G_i = G(\omega_i) = \int_{-T}^{T} B(\tau)\sin\omega_i|\tau| d\tau$, $i = 1, 2$, $\omega^- = \omega_1 - \omega_2$.

Доказательство. Представим смешанный момент $M\xi_1\eta_2$ в виде

$$M\xi(\omega_1)\eta(\omega_2) = \frac{1}{T}\int\int_{-T/2}^{T/2} B(\tau)\cos\omega_1 t_1 \sin\omega_2 t_2 dt_1 dt_2, \tag{6}$$

$\tau = t_1 - t_2$. Перейдем в (6) к интегрированию по τ, t_2, тогда область интегрирования будет определяться соотношениями $-T/2 - t_2 \leqslant \tau \leqslant T/2 - t_2$, $|t_2| \leqslant T/2$. Выберем следующий порядок интегрирования: внутренний интеграл — по t_2, а внешний — по τ. Поскольку границы области интегрирования при этом описываются различными уравнениями, то необходимо рассматривать два случая: $\tau > 0$ и $\tau < 0$. Интегрируя по первой подобласти, получим

$$-\frac{\cos(\omega^+ T/2)}{\omega^+ T}(F_2 - F_1) - \frac{\sin(\omega^+ T/2)}{\omega^+ T}(G_2 - G_1) + \frac{\cos(\omega^- T/2)}{\omega^- T}(F_2 - F_1) - \frac{\sin(\omega^- T/2)}{\omega^- T}(G_2 + G_1),$$

где $\omega^+ = \omega_1 + \omega_2$. Интегрирование по второй подобласти дает это же выражение с противоположным знаком. Таким образом, в итоге $M\xi_1\eta_2 =$

$=0$. Доказательство второго соотношения теоремы 2 можно провести, представив второй смешанный момент функции S следующим образом:

$$MS_1S_2 = M(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) = \frac{1}{T}\iint\limits_{-T/2}^{T/2} B(\tau)\cos(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)\,dt_1 dt_2. \quad (7)$$

Переходя в (7) к интегрированию по τ, t_2 так же, как и в первом случае, получим для областей $\tau > 0$ и $\tau < 0$ величины, равные половине правой части (5), что и завершает доказательство п. 2.

Следует заметить, что в условии теоремы функция F определена как фурье-преобразование от корреляционной функции процесса по конечному интервалу, т. е. при τ_0 порядка T эта функция может существенно отличаться от спектральной плотности. Практически всегда выполняется более сильное условие $\tau_0 \ll T$, и тогда F совпадает со спектральной плотностью.

Следствие из уравнения для спектрального окна. Теорема 3. При $\lambda \to \infty$ для случайного процесса с ограниченной спектральной плотностью, асимптотика которой имеет вид

$$F(\lambda) \sim 0(|\lambda|^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 2,$$

для оптимального спектрального окна при $\Delta = \pi/T$ справедливо уравнение

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(\omega, \lambda)\, MS(\lambda)\, S(\lambda + \Delta)\, d\lambda. \quad (8)$$

Здесь введено другое обозначение для весовой функции, поскольку решения уравнений (3) и (8) могут быть различными.

Доказательство. Уравнение (1) содержит момент четвертого порядка, который можно представить так [3]:

$$\begin{aligned} MS(\lambda)S(\lambda+\Delta)S(\lambda')S(\lambda'+\Delta) &= MS(\lambda)S(\lambda+\Delta)MS(\lambda')\times \\ \times S(\lambda'+\Delta) + MS(\lambda)S(\lambda')&MS(\lambda+\Delta)S(\lambda'+\Delta) + MS(\lambda)S(\lambda'+\Delta)\times \\ &\times MS(\lambda+\Delta)S(\lambda') + K, \end{aligned} \quad (9)$$

где K — четвертый кумулянт — величина меньшего порядка, чем другие слагаемые, и равная нулю, если S — нормальная случайная величина. Если выполнено соотношение $\tau_0 \ll T$, то $K = 0$ в силу центральной предельной теоремы [5]. Из (5) следует $MS(\lambda)S(\lambda+\Delta) = (F(\lambda) + F(\lambda + \Delta))/\pi$. Считая $K = 0$, поделим обе части равенства (9) на $MS(\lambda)S(\lambda + \Delta)$ и перейдем к пределу при $\lambda \to \infty$. Тогда в правой части останется только первое слагаемое, поскольку второй смешанный момент величины S ограничен следующим образом:

$$|MS(\lambda)S(\lambda')| \leqslant (F(\lambda) + F(\lambda') + |G(\lambda) - G(\lambda')|)/(T(\lambda - \lambda')). \quad (10)$$

Если функция $F(\lambda)$ интегрируема $(1 < \alpha < 2)$, то G ограничена. Это следует непосредственно из ее определения:

$$|G| = 2\left|\int\limits_0^T B(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right| \leqslant 2\int\limits_0^T |B(\tau)|\,d\tau = 2\tau_0 B(0) < \infty.$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то $F(\lambda)$ можно представить в виде суммы интегрируемой функции и $F_0(\lambda)$, равной нулю в конечной окрестности точки $\lambda = 0$ и $|\lambda|^{-\alpha}$ вне этой окрестности. Несложно показать, используя связь спектральной плотности с корреляционной функцией и далее переходя к функции G, что функции F_0 соответствует ограниченная функция G для любого $0 < \alpha \leqslant 1$.

Таким образом, в числителе (10) стоит ограниченная функция. Теперь, рассматривая второе слагаемое (9), в пределе получаем нулевой результат, если $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2F(\lambda)=\infty$. Аналогично и третье слагаемое равно нулю. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty} MS(\lambda)\,S(\lambda+\Delta)\,S(\lambda')\,S(\lambda'+\Delta)/MS(\lambda)\,S(\lambda+\Delta)=MS(\lambda')\,S(\lambda'+\Delta), \tag{11}$$

откуда следует уравнение (8).

Представление линейного функционала от спектральной плотности. При решении уравнений (3), (8) будет использована следующая теорема о представлении линейного функционала.

Теорема 4. Пусть $F(\lambda)$ имеет финитное фурье-преобразование на интервале $[-T,\ T]$. Тогда, если $\varphi(\omega,\ \lambda)$ имеет финитное фурье-преобразование по переменной λ на этом же интервале, функция

$$W(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega,\lambda)\,F(\lambda)\,d\lambda \tag{12}$$

представима в виде ряда

$$W(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\Delta n)\,\varphi(\omega,\Delta n)\,\Delta. \tag{13}$$

Доказательство. Представим $F(\lambda)$ по теореме Котельникова и подставим в (12):

$$W(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\Delta n)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega,\lambda)\frac{\sin T(\Delta n-\lambda)}{T(\Delta n-\lambda)}\,d\lambda. \tag{14}$$

Требуется показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega,\lambda)\frac{\sin T(v-\lambda)}{T(v-\lambda)}\,d\lambda=\varphi(\omega,v)\,\Delta. \tag{15}$$

Пусть $\Phi(\omega,\ \tau)$ — фурье-преобразование $\varphi(\omega,\ v)$ по переменной v; $g_T(t)$ — функция, равная $(2T)^{-1}$ на $[-T,\ T]$ и нулю вне этого интервала; тогда из (15) следует

$$2\pi\Phi(\omega,\ \tau)g_T(\tau)=\Phi(\omega,\ \tau)\Delta. \tag{16}$$

Это соотношение справедливо всюду, кроме $|\tau|=T$, если $\Phi(\omega,\ \tau)$ финитна по $\tau\in[-T,\ T]$. Подстановка (15) в (14) завершает доказательство теоремы.

Решение уравнения для $\lambda\to\infty$. Рассмотрим решение уравнения (8) в форме $h_1(\omega-\lambda)$. При этом фурье-преобразование обеих частей (8) дает

$$H(\tau)=0{,}5(1+e^{-i\Delta\tau})^{-1},\quad |\tau|\leqslant T, \tag{17}$$

где $H(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_1(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega/2\pi$. Теперь решение (8) можно представить так:

$$h_1(\omega)=\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\omega\tau}}{2(1+e^{-i\Delta\tau})}\,d\tau. \tag{18}$$

Замена переменных $z=e^{-i\Delta\tau}$ дает следующее выражение:

$$h_1(\omega)=\frac{1}{2i\Delta}\int_{c}\frac{z^{\omega/\Delta}}{z(1+z)}\,dz. \tag{19}$$

Здесь c — единичная окружность, обходимая в положительном направлении, с центром в нулевой точке комплексной плоскости. Поскольку функции h_1 и $S(\lambda)S(\lambda+\Delta)$ имеют финитное фурье-преобразование на интервале $[-T, T]$, то в силу теоремы 4 из (1) следует

$$\widehat{F}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(\omega-\Delta n)\, S(\Delta n)\, S(\Delta(n+1))\,\Delta. \tag{20}$$

Так как $\widehat{F}$ представляет свертку двух функций с финитными фурье-преобразованиями на интервале $[-T, T]$, то сама она также имеет финитное фурье-преобразование на $[-T, T]$. Таким образом, решение уравнения (8) достаточно рассмотреть только для значений аргумента, кратных Δ.

При $\omega/\Delta \geqslant 1$ подынтегральное выражение (19) имеет полюс первого порядка $z=-1$, а при $-m=\omega/\Delta\leqslant 0$ — два полюса: первого порядка $z=-1$ и порядка $m+1$ в точке $z=0$. Используя далее теорему Коши, для каждого случая получаем решение в виде

$$h_1(\omega)=\frac{\pi}{2\Delta}\times\begin{cases}(-1)^{\omega/\Delta-1}, & \omega/\Delta\geqslant 1,\\ (-1)^{\omega/\Delta}, & \omega/\Delta\leqslant 0.\end{cases} \tag{21}$$

Приведем без вывода приближенное решение общего уравнения (3) в форме $h_0(\omega, \lambda)=h_0(\omega-\lambda)$ для случая узкополосного процесса. Предполагая, что F отлична от нуля и слабо изменяется в пределах интервала шириной Λ, отстоящего от начала координат на расстоянии, много большем Λ, а вне этого интервала $F=0$, решение уравнения (3) можно представить так:

$$h_0(\omega)=\frac{\pi}{2\Delta}\times\begin{cases}\left(2\gamma^{\omega/\Delta}-1\right)(-1)^{\omega/\Delta}, & \omega/\Delta\geqslant 0,\\ (-1)^{\omega/\Delta}, & \omega/\Delta<0.\end{cases} \tag{22}$$

Здесь $\gamma=\beta/(2+\beta)$, $\beta=\pi\Delta/(4\Lambda)$. Если $\gamma\to 0$ (что соответствует $\lambda\to\infty$ в уравнении (3)), то решения (21) и (22) совпадают. При этом, как следует из (4), $\varepsilon^2(\omega)\to 0$.

Сравнительный анализ ошибок ε^2, ε_T^2, ε_P^2 оценивания соответственно с использованием решения (22) и спектральных окон Тьюки и Парзена указывает на преимущество предлагаемого метода для центральной части спектра, особенно на больших выборках. Так, отношения $\varepsilon_T^2/\varepsilon^2$, $\varepsilon_P^2/\varepsilon^2$ для спектральной плотности квадратичного типа при $\Lambda=30\Delta$ равны 1,44 и 1,57 (при выборе окон Тьюки и Парзена оптимальными для данной частоты), а при $\Lambda=100\Delta$ — 1,78 и 1,94.

Нетрудно видеть, что применение спектрального окна (21) дает асимптотически несмещенную оценку, если $\lim\limits_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=0$. Среднеквадратическая ошибка при этом определяется из соотношений (2), (20) и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^2&=\sum_m\sum_l h_1((k-m)\Delta)\, h_1((k-l)\Delta)\times\\ &\times\left(MS_mS_lMS_{m+1}S_{l+1}+MS_mS_{l+1}MS_{m+1}S_l\right),\end{aligned} \tag{23}$$

где $S_i=S(i\Delta)$, $\varepsilon_k=\varepsilon(k\Delta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самаров А. М.** Нижняя граница риска оценок спектральной плотности.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 1.
2. **Алексеев В. Г.** Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов.— ППИ, 1973, т. 9, вып. 4.
3. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1972, т. 2.
4. **Кожевникова И. А.** Стохастические системы управления. Новосибирск: Наука, 1979.
5. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1966, т. 1.

Поступила в редакцию 19 июня 1980 г.