

дисперсию оценок Парзена. Анализ соответствующих спектральных окон показал, что они имеют боковые лепестки низкого уровня (порядка -40 дБ), и, следовательно, оптимальные положительные окна могут быть рекомендованы к широкому использованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций вещественной переменной. М.: Физматгиз, 1960.
2. Хэннан Э. Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974.
3. Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
4. Левин В. А. Методика синтеза алгоритмов спектрального анализа для вычислительных устройств с ограниченным объемом памяти. — Кибернетика, 1978, № 6.

Поступила в редакцию 8 мая 1979 г.;
окончательный вариант — 28 декабря 1981 г.

УДК 621.391

Ю. И. ПАЛАГИН, А. С. ШАЛЫГИН
(Ленинград)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Важной задачей при статистических измерениях корреляционных функций (КФ) стационарных случайных процессов (СП) является оценка погрешности, обусловленной ограниченностью длины T реализации обрабатываемого процесса $\xi(t)$, $t \in [0, T]$. Полная информация о погрешности обработки содержится в законах распределения оценок. Знание распределения дает возможность строить доверительные интервалы для оценок КФ [1], может использоваться при распознавании СП, выборе аналитической модели КФ, контроле статистического моделирования СП и в ряде других задач.

В большинстве работ, посвященных этому вопросу ([2] и др.), рассматривается только простейшая характеристика погрешности — дисперсия оценки КФ. При увеличении длины реализации закон распределения оценки КФ $R_N(\tau)$ приближается к нормальному. Поэтому использование дисперсии для оценок точности оправдано при достаточно больших длинах реализации СП. Однако возникает вопрос о длине реализации, начиная с которой возможна аппроксимация распределения оценки КФ нормальным законом. Аналогичный вопрос встает при использовании других аппроксимаций, например аппроксимации закона распределения оценки КФ отрезком ряда Эджворта [1, 3].

В настоящей работе предлагается метод вычисления плотности и функции распределения оценок дисперсии и КФ СП, приводятся результаты численных исследований. Кроме оценки КФ, предлагаемый здесь метод позволяет вычислять законы распределения оценок нормированной и взаимной КФ, спектральной плотности, а также оценок некоторых параметров стационарных процессов. Отметим, что вопрос о погрешности определения нормированной КФ (НКФ) СП в известной нам литературе рассматривался лишь на уровне приближенных формул для дисперсии [3, 4].

Законы распределения оценок дисперсии и КФ. Пусть с шагом Δt обрабатывается реализация гауссового СП $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, имеющего неизвестные, подлежащие определению характеристики: математическое ожидание (МО) m_x и КФ $R(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau)$ ($\rho(\tau)$ — НКФ процесса). Оценки

МО и КФ вычисляются по формулам

$$\tilde{m}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k, \quad \tilde{R}_N(\tau) = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^{N-j} (\xi_k - w\tilde{m}_N) (\xi_{k+j} - w\tilde{m}_N), \quad (1)$$

где $\xi_k = \xi(k\Delta t)$ — дискретные значения СП; $\tau = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots$; $T = N\Delta t$. В (1) введен параметр w , принимающий два значения: $w = 0, 1$; значение $w = 0$ соответствует обработке СП при известном МО, $w = 1$ — при неизвестном МО. В силу несмещенности \tilde{m}_N для обоих случаев полагаем далее $m_\xi = 0$.

Представим оценку КФ в виде квадратичной формы

$$\tilde{R}_N(\tau) = x^T G_j x, \quad G_j = (\delta(j)/(N-j))(I - E(w/N))A_j(I - E(w/N)). \quad (2)$$

Здесь G_j , I , E , A_j — матрицы порядков $N \times N$; I — единичная матрица; $A_j = \|a_{kl}^j\|$, $a_{kl}^j = 1$ при $|k-l| = j$, $a_{kl}^j = 0$, если $|k-l| \neq j$; матрица $E = ee^T$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$; $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ — N -мерные векторы; $\delta(j) = 1$ при $j = 0$, $\delta(j) = 1/2$ — в противном случае; τ — символ транспонирования. Предположим, что вектор x имеет положительно определенную корреляционную матрицу $K = \|R((k-l)\Delta t)\|$, что, как правило, выполняется на практике. С помощью линейной замены переменных оценка КФ приводится к виду

$$\tilde{R}_N(\tau) = \sum_{k=1}^N \lambda_k z_k^2, \quad (3)$$

где $z_k \in N(0, 1)$ — нормальные случайные величины (СВ) с математическим ожиданием $Mz_k = 0$ и единичной дисперсией $\sigma^2[z_k] = 1$; λ_k — собственные числа матрицы $W_j = G_j K$.

Будем строить разложение плотности распределения в виде ряда типа Грама — Шарлье:

$$f(x) = \Psi(x) \sum_{m=0}^{\infty} b_m \mathcal{P}_m(x), \quad b_m = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_m(x) f(x) dx, \quad (4)$$

$\mathcal{P}_m(x) = \sum_{k=0}^m p_k^{(m)} x^k$ — последовательность полиномов степени m , ортонормированных с весовой функцией $\Psi(x)$. Функцию $\Psi(x)$ зададим из условия обеспечения сходимости ряда (4). Из работы [5] следует, что плотность распределения оценки КФ имеет экспоненциальный характер убывания на бесконечности. Учитывая асимптотическую нормальность оценки КФ, функцию $\Psi(x)$ представим в виде

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1 \exp(-\alpha_1 x), & x > b > 0, \\ \exp(-x^2/2s^2), & x \in [-a, b], \quad a > 0, \\ c_2 \exp(-\alpha_2 |x|), & x < -a. \end{cases} \quad (5)$$

В (5) параметры определяются формулами $b = \alpha_1 s^2$, $a = \alpha_2 s^2$, $c_i = \exp(\alpha_i^2 s^2/2)$, которые получаются из условия гладкости в точках a , b . Сходимость разложения (4) при значениях параметров $\alpha_i \in (0, 1/A_i)$, $s \neq 0$, $A_1 = \max\{\lambda_k\} > 0$, $A_2 = -\min\{\lambda_k\} > 0$ следует из условия сходимости рядов типа Грама — Шарлье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \Psi^{-1}(x) dx < \infty, \quad \Psi(x) > 0. \quad (6)$$

Отметим, что необходимое условие сходимости (6) не выполняется для весовой функции, равной $\Psi(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2\sigma^2)$. Поэтому для законов распределения оценки КФ ряд (4) по полиномам Эрмита расходится. Быстрая (при числе членов разложения, равном 5—10) расходимость этих рядов наблюдалась при расчетах. Интегрируя (4) в пределах от $-\infty$ до x , получаем разложение функции распределения

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m Q_m(x), \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^m p_k^{(m)} J(x, k), \quad (7)$$

где $J(x, k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \Psi(t) dt$. Для вычисления $J(k, x)$ интегрированием по частям могут быть получены рекуррентные по k формулы. Коэффициенты $p_k^{(m)}$ вычисляются по известным рекуррентным соотношениям теории ортогональных многочленов [6]. Дифференцируя $\chi(t) = \prod_{k=1}^N (1 - 2i\lambda_k t)^{-1/2}$, $i = \sqrt{-1}$, — характеристическую функцию СВ (3), для моментов $\mu_k = M[\tilde{R}_N(\tau)]^k$ оценки КФ получим следующие формулы:

$$\mu_{k+1} = k! \sum_{j=1}^k 2^{k-j} S_{k-j} \mu_j / j!, \quad S_l = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{l+1}, \quad \mu_0 = 1. \quad (8)$$

Разложения (4), (5) справедливы не только для законов распределения $\tilde{R}_N(\tau)$, но и для произвольной квадратичной формы. В частности, ряды (4), (6) позволяют вычислять распределение оценки взаимной КФ

$$\tilde{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^{N-j} (\xi_k^{(1)} - w\tilde{m}_1)(\xi_{k+j}^{(2)} - w\tilde{m}_2)$$

двух стационарно связанных СП $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$. Здесь \tilde{m}_i — оценки МО, параметр w определяется так же, как и в (1).

Для вычисления распределения оценки дисперсии $\tilde{R}_N(0)$ продолжим ее плотность $p(x)$ четным образом на отрицательную полуось и выберем в качестве весовой функции $\Psi_1(x) = |x|^\alpha e^{-\alpha|x|}$. Полученная функция $p_1(x)$ имеет нечетные моменты, равные нулю, а четные равны удвоенным моментам оценки дисперсии. Разложение (4) будет сходиться для $p_1(x)$ в силу оценок работы [5] и условия (6); если параметры $\Psi_1(x)$ лежат в интервалах $\Theta \in [0, N-1)$, $\alpha \in (0, 1/A_1)$. Данное разложение может быть использовано для расчета распределения оценок спектральной плотности стационарной последовательности [7], эффективной оценки дисперсии СП [8].

Оценка нормированной корреляционной функции $\tilde{\rho}_N(\tau) = \tilde{R}_N(\tau) / \tilde{R}_N(0)$ представляет собой отношение квадратичных форм вида (2) с матрицами G_j, G_0 , где G_0 неотрицательно определена. Функция распределения $\tilde{\rho}_N(\tau)$ $F_p(y) = P\{\tilde{\rho}_N(\tau) < y\} = P\{x^T G_j x - y x^T G_0 x < 0\}$ выражается через значение функции распределения $F_v(z)$ формы $v(x) = x^T V x$, $V = G_j - y G_0$ в точке $z = 0$. Поэтому предложенный метод позволяет вычислять также и функцию распределения оценки НКФ.

Разложения (4), (5), (7) использовались для расчетов законов распределения оценки (1) КФ стационарной последовательности, получаемой после дискретизации с шагом Δt СП с НКФ:

$$\rho_1(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau. \quad (9)$$

Проводилось сравнение законов распределения нормированных СВ $\eta_N(\tau) = \{\tilde{R}_N(\tau) - M\tilde{R}_N(\tau)\} / \sigma[\tilde{R}_N(\tau)]$ и аппроксимаций распределения от-

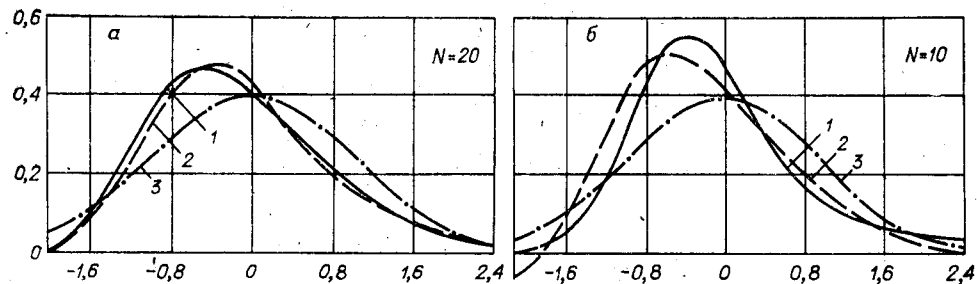


Рис. 1. Графики плотности распределения оценки КФ стационарного процесса: 1 — истинная плотность распределения, 2 — отрезок ряда Эджворта, 3 — плотность нормального закона.

резками ряда Эджворта плотности $f_0(x)$ и функции $F_0(x)$, содержащими γ_1, γ_2 . Пример расчета ($\beta=0, \tau=\Delta t=1/\alpha$) приведен на рис. 1, а, б. Расчеты показали, что аппроксимация $f_0(x) \approx f(x)$ плотности распределения допустима практически при $T_0 = (6-7)\tau_k$ (на рис. 1, а при $N=20$), где $\tau_k = 3/\alpha$ — интервал корреляции СП. Этот вывод остается верным и при $\beta \neq 0$, при уменьшении шага дискретизации и увеличении $\tau = j\Delta t$. Для квантилей x_p распределения СВ $\eta_N(\tau)$ погрешность приближенного равенства $x_p^0 \approx x_p$ составляет при $T = (5-6)\tau_k$ и $p \in [0,05; 0,95]$ примерно (5-10) %. Здесь x_p, x_p^0 — квантили уровня p функций $F(x)$ и $F_0(x)$, определяемые равенством $F(x_p) = p$. С увеличением длины реализации T эта разница уменьшается.

Моментные характеристики оценки дисперсии и КФ. Возможность аппроксимации отрезком ряда Эджворта распределения оценки КФ при малых T позволяет полностью характеризовать погрешность обработки только четырьмя величинами: МО, дисперсией, γ_1, γ_2 . Из (3) в силу известных свойств следа $\text{Sp}(W_j)$ матрицы моменты оценки КФ определяются формулами

$$M\bar{R}_N(\tau) = \sum_{k=1}^N \lambda_k = \text{Sp}(W_j), \quad \sigma^2[\bar{R}_N(\tau)] = 2 \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 = 2\text{Sp}(W_j^2), \quad (10)$$

$$\gamma_1 = 8 \sum_{k=1}^N \lambda_k^3 / \sigma^3[\bar{R}_N(\tau)] = 8 \text{Sp}(W_j^3) / \sigma^3[\bar{R}_N(\tau)], \quad (11)$$

$$\gamma_2 = 48 \sum_{k=1}^N \lambda_k^4 / \sigma^4[\bar{R}_N(\tau)] = 48 \text{Sp}(W_j^4) / \sigma^4[\bar{R}_N(\tau)]. \quad (12)$$

Первые два момента $\bar{R}_N(\tau)$ детально исследованы в литературе. Рассмотрим асимметрию γ_1 и эксцесс γ_2 . Из (12) следует, что для оценки КФ всегда $\gamma_2 > 0$, а для оценки дисперсии $\gamma_1 > 0$. Численные исследования показали, что при $T \geq T_0$ для расчета γ_i можно пользоваться приближенными асимптотическими формулами

$$\gamma_1 \approx \Gamma_1 N^{-1/2}, \quad \gamma_2 \approx \Gamma_2 N^{-1}, \quad (13)$$

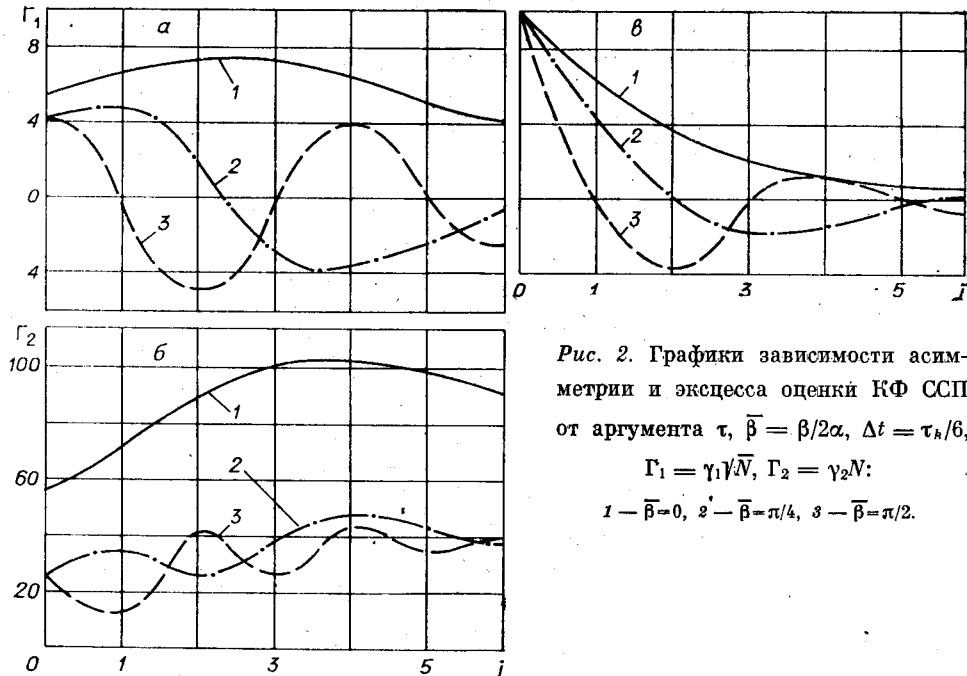


Рис. 2. Графики зависимости асимметрии и эксцесса оценки КФ СП от аргумента τ , $\bar{\beta} = \beta/2\alpha$, $\Delta t = \tau_k/6$,

$$\Gamma_1 = \gamma_1 \sqrt{N}, \quad \Gamma_2 = \gamma_2 N:$$

$$1 - \bar{\beta} = 0, \quad 2 - \bar{\beta} = \pi/4, \quad 3 - \bar{\beta} = \pi/2.$$

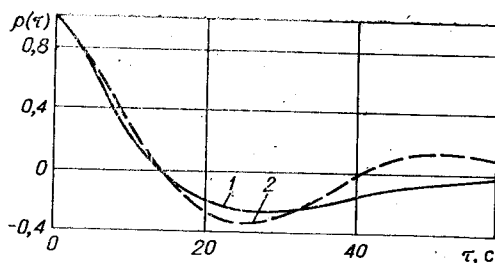


Рис. 3. Нормированная КФ высоты полета летательного аппарата:
1 — истинная НКФ, 2 — аппроксимация НКФ.

могут возрастать с ростом τ . Оценки сильно осциллирующих КФ содержат существенно меньшие значения параметров γ_i . Нормализация оценки близких к нулю значений КФ в силу малых асимметрий происходит уже при $T_N = (5-8)\tau_k$. Наиболее «трудно нормализуемы» участки сравнительно больших значений КФ (окрестности дисперсии, максимумов $R(\tau)$), так как распределение этих значений обладает значительной асимметрией. Процесс нормализации таких участков заканчивается при длинах реализации T_N , изменяющихся в зависимости от β в промежутке $T_N/\tau_k \in [30, 70]$. Эти значения T_N получены по следующему критерию приближенной нормальности: $\max_{x \in [-3, 3]} \{ |\varphi(x) - f(x)| / \varphi(x) \} \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$. Для квантилей x_p , $p \in [0,05; 0,95]$, распределения оценки дисперсии и КФ погрешность аппроксимации квантилями нормального закона при $T_N \geq 30\tau_k$ составляет (5—10) %.

Исследовались стационарные процессы в системе стабилизации летательного аппарата при полете в турбулентной атмосфере. Соответствующая структурная схема дана в [8]. На рис. 3 приведена истинная НКФ высоты полета $h(t)$ и аппроксимация НКФ моделью (9). В первых столбцах таблицы представлены истинные значения величин Γ_i , $s = \sigma [\bar{R}_N(j\Delta t) \sqrt{N-j}] / \sigma_s^2$, а во вторых — их значения, вычисленные по НКФ (9). Проведенные исследования позволяют сделать вывод об относительно слабой зависимости распределения оценок КФ от вида аппроксимирующей модели НКФ. Особенно слабо зависит от НКФ распределение оценки дисперсии и КФ при малых τ . При $\tau \rightarrow \tau_k$ погрешность в расчете s , Γ_i возрастает и может достигать (в связи с ухудшением качества аппроксимации «хвостов» КФ) больших значений. Однако для всех СП в исследуемой системе эта погрешность не превосходила (10—15) % при $\tau \in [0, \tau_k]$.

Относительно слабая чувствительность распределения к виду НКФ позволяет использовать типовые аналитические модели КФ для приближенной оценки плотности распределения КФ, при построении доверительных интервалов.

Заключение. Для оценок погрешности экспериментального определения корреляционных функций, построения доверительных интервалов, выбора аналитических зависимостей, аппроксимирующих КФ, решения задач распознавания и контроля статистического моделирования стационарных процессов необходимо рассчитывать законы распределения используемых статистических оценок.

Предложен метод, позволяющий вычислять плотности и функции распределения оценок корреляционных характеристик стационарных процессов. Определен диапазон длин реализации СП, при которых можно

где Γ_i — постоянные, вычисляемые по коротким (порядка $T = (3-5)\tau_k$) реализациям. Это дает возможность существенно сокращать машинное время. Для СП с НКФ (9) погрешность формул (13) не превосходит 10 %.

На рис. 2, а—в приведены графики зависимости Γ_i от аргумента $\tau = j\Delta t$ КФ для СП с НКФ (9). Из расчетов видно, что наибольшие значения γ_i имеют оценки с монотонно убывающими КФ, причем для таких КФ значения γ_i

τ, c	s		Γ_1		Γ_2	
	1	2	1	2	1	2
0	2,32	2,33	5,9	6,2	57	64
5	1,99	1,97	6,5	6,5	68	68
20	1,35	1,50	-5,3	-6,1	65	79
35	1,7	1,65	-6,8	-6,7	105	104

аппроксимировать законы распределения оценок КФ рядом Эджворта и нормальным законом. Выполненные численные исследования показывают, что для квантилей x_p распределения оценки КФ возможна аппроксимация с точностью до (5—10)% квантилями ряда Эджворта при $T \geq (5 \div 6)\tau_k$ и $p \in [0,05; 0,95]$. При тех же уровнях p и той же точности аппроксимация нормальным законом возможна в случае $T \geq 30\tau_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волгин В. В., Саков И. А. Построение доверительных интервалов на корреляционные функции, рассчитанные по экспериментальным данным.— Автметрия, 1974, № 2.
2. Кутин Б. Н. О вычислении корреляционной функции стационарного случайного процесса по экспериментальным данным.— Автоматика и телемеханика, 1957, т. XVIII, № 3.
3. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. М.: Энергия, 1979.
4. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958.
5. Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче.— Теория вероятностей и ее применение, 1961, т. 6, № 2.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.— Л.: Наука, 1949.
7. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
8. Палагин Ю. И., Шалыгин А. С. Измерение характеристик случайных процессов на основе эффективных оценок.— Автоматика и вычислительная техника, 1977, № 5.

Поступила в редакцию 19 июня 1980 г.

УДК 681.323

В. А. ПРЯНИШНИКОВ, М. Б. СТОЛБОВ, В. И. ЯКИМЕНКО
(Ленинград)

ЦИФРОВОЙ АНАЛИЗАТОР С АДАПТИВНОЙ ПРОЦЕДУРОЙ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА

Современные эксперименты характеризуются непрерывным увеличением сложности и требуемой точности при обработке потоков измерительной информации, что приводит к необходимости измерения все большего количества характеристик случайных сигналов в условиях априорной неопределенности не только в отношении параметров сигнала, но и его класса. При известных ограничениях на объем памяти запоминающих и быстродействие арифметических устройств такая задача требует проведения эксперимента с итеративно изменяемыми параметрами алгоритма или введения адаптации в процедуру измерения.

Современный уровень развития теории адаптивного оценивания параметров сигнала дает возможность решать широкий круг прикладных задач [1, 2], однако формализованный характер решений затрудняет их непосредственную инженерную интерпретацию для задач других типов, в том числе для измерений конкретных вероятностных характеристик.

В экспериментальных исследованиях важное значение имеет спектральный анализ случайных процессов. В отличие от адаптивных методов измерения корреляционных функций и законов распределения вероятностей, исследованных в последние 10—15 лет, адаптивное измерение спектров сигналов начало интенсивно развиваться только в последние годы. Рассмотрим один из характерных подходов, используемых при построении адаптивных анализаторов случайных процессов.

Одной из актуальных задач адаптивного спектрального анализа является оптимальный выбор ординат спектра, аппроксимирующих оцениваемую функцию с погрешностью, не превышающей допустимую.