Исходя из правил построения графа, согласно выражениям (24), (25), с учетом сделанного выше замечания о соотношении комплексных операций и ячеек памяти с арифметическими операциями и обычными ячейками можно определить параметры

$$D = 2D_k = 2(2r-1)N; \tag{26}$$

$$S = 2S_k + 2M_k = 12(N-1) - 8r; \tag{27}$$

$$M = 4M_k + 2 = 12N - 16r - 6, \tag{28}$$

где D_k, S_k и M_k — число комплексных ячеек памяти и операций сложения, умножения, причем M_k не учитывает умножения на ± 1, $\pm j$, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/N$.

Из сравнения (26)—(28) с (18)—(20) следует, что $D_4/D_3 > 2$, $S_4 < S_3$ при $r > 6$ и $M_4 < M_3$ при $r > 12$, где индексы при D, S и M определяются номером варианта. Аналогичное сопоставление параметров приведенных выше рекурсивных и нерекурсивных алгоритмов показывает, что любой из нерекурсивных алгоритмов уступает по всем параметрам любому рекурсивному, начиная с $r = 4$. Однако нерекурсивные алгоритмы являются абсолютно устойчивыми независимо от квантования коэффициентов и округления результатов арифметических действий. Изложенное позволяет сделать вывод о том, что при выборе того или иного из рассмотренных алгоритмов для реализации следует принимать во внимание конкретные условия решаемой задачи (такие, например, как длительность анализируемого процесса, точность измерения и максимальная ширина спектра), а также учитывать то, к какому из параметров предъявляются наиболее жесткие требования с точки зрения технического исполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
2. **Chen Wen-Hsiung, Smith C. H., Fralick S. C.** A Fast Computational Algorithm for Discrete Cosine Transform.— IEEE Trans. on Comm., 1977, vol. COM-25, N 9, p. 1004—1009.
3. **Mauersberger W., Nawrath R.** Haar, Walsh, Slant and Discrete Cosine Transform Coding of Images. A Comparison.— In: Electromagn. Compatibility, June 1977. 2-nd Symp. and Techn. Exhib. Montreux, 1977.
4. **Ахмед Н., Рао К. Р.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.
5. **Ahmed N., Natarajan T., Rao K. R.** Discrete Cosine Transform.— IEEE Trans. on Computers, 1974, vol. C-23, N 1, p. 90—93.
6. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
7. **Оботнин А. Н., Страшинин Е. Э.** Алгоритмы определения скользящего спектра.— Автометрия, 1975, № 1.
8. **Зеленков А. В.** Нерекурсивные алгоритмы спектрального анализа на скользящем интервале в базисе функций Виленкина — Крестенсона.— Радиотехника и электроника, 1976, № 12.

Поступила в редакцию 9 июля 1981 г.

УДК 621.391.14

В. А. ЛЕВИН

(Ленинград)

О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ОКНАХ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В практическом спектральном анализе часто используется следующая оценка спектральной плотности:

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{R}(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} w_k \hat{R}(k) \cos k\lambda, \qquad -\pi \leqslant \lambda < \pi, \tag{1}$$

где $\{w_k\}$ — так называемое корреляционное окно, $\{\hat{R}(k)\}$ — некоторая оценка корреляционной функции.

В настоящей работе исследуется минимальная величина смещения оценки (1), которая может быть получена за счет выбора формы окна при фиксированном n.

Неулучшаемая граница смещения спектральных оценок. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ дифференцируема $r-1$ раз, а r-я производная кусочно-непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f^{(r)}(\lambda)| \leqslant M_r, \quad -\pi \leqslant \lambda < \pi. \tag{2}$$

Класс периодических функций, удовлетворяющих условию (2), обычно обозначают через W_*^r [1]. Так как спектральные плотности являются четными неотрицательными функциями, то их совокупность образует некоторое подмножество класса W_*^r, которое обозначим через W_{**}^r.

Будем считать, что оценка $\{\hat{R}(k)\}$ несмещенная. При использовании смещенной оценки необходимо в дальнейшем рассмотрении очевидным образом изменить коэффициенты $\{w_k\}$.

Математическое ожидание оценки (1) равно

$$\mathscr{E}\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(\lambda - g) f(g)\, dg, \tag{3}$$

где

$$Q(g) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} w_k \cos kg\right).$$

Интегрируя в (3) r раз по частям, получим

$$\mathscr{E}\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\, dg + \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\lambda - g) f^{(r)}(g)\, dg. \tag{4}$$

Здесь $Q_r(g) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} k^{-r} w_k \cos\left(kg - \frac{r\pi}{2}\right)$.

Периодическая функция $f(\lambda) \in W_*^r$ допускает интегральное представление [1, с. 302]:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\, dg + \int_{-\pi}^{\pi} D_r(\lambda - g) f^{(r)}(g)\, dg, \tag{5}$$

где

$$D_r(g) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(gk - \frac{r\pi}{2}\right).$$

Из (4) и (5), учитывая периодичность $f^{(r)}(g)$, получим

$$b(\lambda) = \mathscr{E}\hat{f}(\lambda) - f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} [\Delta_r(\lambda - g) + c]\, f^{(r)}(g)\, dg.$$

Здесь c — произвольная константа.

Отсюда

$$|b(\lambda)| \leqslant \Phi_r(n) M_r, \tag{6}$$

где

$$\Phi_r(n) = \min_c \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_r(g) + c|\, dg = \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_r(g) + c^*|\, dg. \tag{7}$$

Таблица 1

r	n	Окно				
		Бартлетта	Парзена	Ханна	Хэмминга	Фавара
1	16	2,006—1	1,653—1	1,192—1	1,141—1	9,817—2
	32	1,141—1	8,272—2	5,961—2	5,770—2	4,909—2
	64	6,396—2	4,137—2	2,981—2	2,920—2	2,454—2
	128	3,542—2	2,068—2	1,490—2	1,477—2	1,227—2
2	16	7,289—2	2,250—2	9,912—3	9,195—3	4,819—3
	32	3,645—2	5,743—3	2,478—3	2,321—3	1,205—3
	64	1,822—2	1,450—3	6,214—4	5,863—4	3,012—4
	128	9,111—3	3,644—4	1,549—4	1,478—4	7,530—5

Функция $f_r(g)$, являющаяся r-м периодическим интегралом от $f_r^r(g) = M_r \operatorname{sign}[\Delta_r(g) + c^*]$, суммированием с константой может быть сделана неотрицательной. Для этой функции неравенство (6) переходит в равенство, т. е. (6) дает неулучшаемую границу смещения спектральных оценок. Это позволяет провести сравнительный анализ корреляционных окон по величинам Φ_r.

Сравнительный анализ корреляционных окон. Как было показано Дж. Фаваром (см., например, [1, с. 304]), минимальное значение Φ_r равно

$$\min_{\{w_k\}} \Phi_r(n) = k_r/n^r, \quad k_r = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i(r+1)}}{(2i+1)^{r+1}}.$$

Отсюда следует, что для спектров, имеющих непрерывные производные до $r-1$-го порядка, могут быть построены оценки, смещение которых убывает с ростом n как n^{-r}. Коэффициенты $\{w_k\}$, доставляющие минимум $\Phi_r(n)$, определяются равенствами

$$w_k = w_{\Phi k}^r = \frac{\pi}{(r-1)!} \left(\frac{k}{2n}\right)^r \frac{d^{(r-1)} \varphi_r(z)}{dz^{r-1}} \bigg|_{z=k/2n} \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$

где $\varphi_r(z) = \operatorname{ctg} \pi z$ для нечетных r и $\varphi_r(z) = -\operatorname{cosec} \pi z$ для четных r.

Окна $w_{\Phi k}^r$ будем называть корреляционными окнами Фавара r-го порядка. В спектральной области окна Фавара имеют большие боковые лепестки и поэтому вряд ли могут быть рекомендованы к широкому использованию. Значение этих окон состоит в том, что они дают предельно достижимую границу смещения и в конечном счете позволяют выявить окна, удовлетворяющие распространенным на практике критериям и обеспечивающие близкие к этой границе результаты.

Рассмотрим ряд распространенных окон: Бартлетта, Парзена, Ханна, Хэмминга [2].

Наибольший интерес, очевидно, представляют малые значения r, а именно $r = 1$ и $r = 2$. В общем случае, к сожалению, интегралы в (7) могут быть найдены только численно. В табл. 1 приведены значения $\Phi_1(n)$ и $\Phi_2(n)$ для ряда n. Наиболее близкие результаты к окну Фавара дают окна Ханна и Хэмминга. На классе W_{**}^1 смещение оценок, построенных с использованием этих окон, превышает абсолютный минимум менее чем на 25%, тогда как смещение оценки Бартлетта (при $n = 128$) почти в 3 раза больше смещения оценки Фавара.

Оптимальные положительные корреляционные окна. Оценка спектральной плотности, даже достаточно устойчивая, может получаться на некоторых частотах отрицательной, если спектральное окно имеет отрицательные боковые лепестки. Это весьма нежелательный эффект, например, потому, что отрицательная спектральная плотность не допускает физической интерпретации. В связи с этим в ряде случаев выдвигается требование неотрицательности спектрального окна $Q(g) \geqslant 0$. Окна $\{w_k\}$, для которых выполняется такое условие, будем называть положительными. Примерами положительных корреляционных окон являются окна Бартлетта и Парзена. Как следует из данных, помещенных в табл. 1, смещение оценок с этими окнами существенно превышает нижнюю границу. Поэтому выясним, какой уровень смещения может быть достигнут при использовании положительных окон.

Для того чтобы тригонометрический полином $Q(g)$ не принимал отрицательных значений, по теореме Фейера — Рисса [3], необходимо и достаточно, чтобы он мог быть представлен в виде

$$Q(g) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{ikg} \right|^2, \tag{8}$$

где $\{v_k\}$ — некоторые числа.

Как известно [2], спектральное окно периодограммоценок спектральной плотности также имеет вид (8), причем в этом случае $\{v_k\}$ представляют собой так называемое окно данных. Таким образом, задача синтеза оптимального положительного корреляционного окна сводится к построению оптимального (в смысле минимума смещения) окна данных.

Корреляционное окно связано с окном данных следующими соотношениями:

$$w_k = \sum_{m=0}^{n-k-1} v_m v_{m+k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Оптимальные окна данных для классов спектральных плотностей W^r_{**} $(r = 1, 2)$ были построены в [4]. Результаты работы [4] легко переносятся на случай $r > 2$. Окончательно получаем, что оптимальные положительные окна могут быть найдены по формулам (9), причем в качестве $\{v_k\}$ должны быть взяты компоненты собственного вектора, соответствующего наибольшему собственному числу матрицы

$$\chi^r = \| \chi^r_{ik} \|^n_1,$$

$$\chi^r_{ik} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{(|i-k|-1)(r+1)/2}}{|i-k|^{r+1}}, & |i-k| \text{ — нечетное}, \\ 0, & |i-k| \text{ — четное}. \end{cases}$$

Нами была разработана программа синтеза оптимальных окон на языке ФОРТРАН-IV (ДОС ЕС) и построены окна для $r = 1$, $r = 2$ и различных n. Соответствующие константы $\Phi_r(n)$ приведены в табл. 2. Оптимальные окна дают на классах W^r_{**} в среднем на 20% меньшее смещение, чем окно Парзена.

В табл. 3 приведены значения величин

$$k = \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} w_k^2\right)$$

(для $n \geqslant 64$), которым, как известно [2], пропорциональна дисперсия спектральных оценок (1) для ряда широко распространенных оценок корреляционной функции. Как следует из данных, помещенных в табл. 3, дисперсия оценок с оптимальными окнами меньше дисперсии оценок Хэмминга, Ханна и несколько (приблизительно на 10%) превышает

Таблица 2

n	16	32	64	128
$\Phi_1(n)$	1,411—1	7,147—2	3,596—2	1,804—2
$\Phi_2(n)$	1,741—2	4,576—3	1,173—3	2,974—4

Таблица 3

Окно				
Бартлетта	Парзена	Ханна	Хэмминга	Фавара ($r=2$)
0,667	0,539	0,750	0,795	0,593

дисперсию оценок Парзена. Анализ соответствующих спектральных окон показал, что они имеют боковые лепестки низкого уровня (порядка —40 дБ), и, следовательно, оптимальные положительные окна могут быть рекомендованы к широкому использованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций вещественной переменной. М.: Физматгиз, 1960.
2. Хэннан Э. Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974.
3. Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
4. Левин В. А. Методика синтеза алгоритмов спектрального анализа для вычислительных устройств с ограниченным объемом памяти.— Кибернетика, 1978, № 6.

Поступила в редакцию 8 мая 1979 г.;
окончательный вариант — 28 декабря 1981 г.

УДК 621.391

Ю. И. ПАЛАГИН, А. С. ШАЛЫГИН

(Ленинград)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Важной задачей при статистических измерениях корреляционных функций (КФ) стационарных случайных процессов (СП) является оценка погрешности, обусловленной ограниченностью длины T реализации обрабатываемого процесса $\xi(t)$, $t\in[0, T]$. Полная информация о погрешности обработки содержится в законах распределения оценок. Знание распределения дает возможность строить доверительные интервалы для оценок КФ [1], может использоваться при распознавании СП, выборе аналитической модели КФ, контроле статистического моделирования СП и в ряде других задач.

В большинстве работ, посвященных этому вопросу ([2] и др.), рассматривается только простейшая характеристика погрешности — дисперсия оценки КФ. При увеличении длины реализации закон распределения оценки КФ $\tilde{R}_N(\tau)$ приближается к нормальному. Поэтому использование дисперсии для оценок точности оправдано при достаточно больших длинах реализации СП. Однако возникает вопрос о длине реализации, начиная с которой возможна аппроксимация распределения оценки КФ нормальным законом. Аналогичный вопрос встает при использовании других аппроксимаций, например аппроксимации закона распределения оценки КФ отрезком ряда Эджворта [1, 3].

В настоящей работе предлагается метод вычисления плотности и функции распределения оценок дисперсии и КФ СП, приводятся результаты численных исследований. Кроме оценки КФ, предлагаемый здесь метод позволяет вычислять законы распределения оценок нормированной и взаимной КФ, спектральной плотности, а также оценок некоторых параметров стационарных процессов. Отметим, что вопрос о погрешности определения нормированной КФ (НКФ) СП в известной нам литературе рассматривался лишь на уровне приближенных формул для дисперсии [3, 4].

Законы распределения оценок дисперсии и КФ. Пусть с шагом Δt обрабатывается реализация гауссового СП $\xi(t)$, $t\in[0, T]$, имеющего неизвестные, подлежащие определению характеристики: математическое ожидание (МО) m_ξ и КФ $R(\tau)=\sigma_\xi^2\rho(\tau)$ ($\rho(\tau)$ — НКФ процесса). Оценки