

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах с дисперсией.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1727.
2. Кузнецов Е. А. Коллапс электромагнитных волн в плазме.— ЖЭТФ, 1974, т. 66.
3. Мушер С. Л., Стурман Б. И. О коллапсе плазменных волн вблизи нижнего гибридного резонанса.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 537.
4. Кузнецов Е. А., Спектор М. Д. О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 262.
5. Львов В. С., Рубенчик А. М. Квазидинамическое описание пространственно-неоднородных сингулярных спектров слабой турбулентности.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 127.
6. Кузнецов Е. А., Спектор М. Д. О слабонадкритической конвекции.— ПМТФ, 1980, № 2, с. 262.
7. Кузнецов Е. А., Турицын С. К. О двумерных и трехмерных солитонах в слабодиспергирующих средах.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 1457.
8. Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V. On Topological Meaning of Clebsch Variables.— Phys. Lett., 1980, vol. 77A, p. 37.
9. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения.— УФН, 1974, т. 114, с. 609.
10. Гранкин В. Л. и др. Вторичная турбулентность параметрически возбужденных спиновых волн.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 763.
11. Лавриненко А. В. и др. Кинетическая неустойчивость сильно неравновесной системы спиновых волн и перестраиваемое излучение феррита.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 1022.
12. Рубенчик А. М., Рыбак И. Я., Стурман Б. И. О высокочастотном нагреве плазмы в сильном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1364.
13. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. Слабая ленгмюровская турбулентность изотермической плазмы.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 155.
14. Рубенчик А. М. Об аномальном поглощении электромагнитной волны с частотой, близкой к удвоенной плазменной.— ЖЭТФ, 1975, т. 8, с. 1005.
15. Musher S. L., Rubenchik A. M., Sturman B. I. Collective Effects Associated with Low Hybrid Heating.— Plasma Physics, 1978, vol. 20, p. 1131.
16. Musher S. L. Numerical Solution of Kinetic Equations for Plasma Waves.— Jour. of Comput. Physics, 1981, vol. 43, p. 250.
17. Musher S. L. About Establishing of Kolmogorov Type Spectrum in the System of Nonlinear Oscillators.— Phys. Lett., 1979, vol. 70A, p. 361.
18. Канашов А. А., Рубенчик А. М. О спектре турбулентности неизотермической плазмы.— ДАН, 1980, т. 253, № 5.
19. Львов В. С., Фалькович Г. Е. О сильно анизотропных спектрах слабой звуковой турбулентности.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, № 2.
20. L'vov V. S., Predtechensky A. A. On Landau and Stochastic Attractor Pictures in the Turbulent Transition Problem.— Physica 2D, 1981, p. 38.
21. Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И. Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натуральный и численный эксперимент.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, № 3.
22. Kuznetsov E. A., L'vov V. S. Turbulent Spectrum in the Direct Interaction Model.— Phys. Lett., 1977, vol. 64A, p. 14.
23. L'vov V. S., Mikhailov A. V. About non Linear Theory of Wave and Hydrodynamic Turbulence of Compressible Liquid.— Physica 2D, 1981, p. 224.

Поступила в редакцию 10 августа 1982 г.

УДК 621.391.14

А. В. ЗЕЛЕНКОВ

(Рига)

АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНОГО КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА НА СКОЛЬЗЯЩЕМ ИНТЕРВАЛЕ

Введение. Дискретное косинусное преобразование (ДКП) относится к классу ортогональных преобразований, называемых сдвинутыми дискретными преобразованиями Фурье [1]. Хорошая декорреляция исходных данных при существенной неравномерности дисперсии компонент, свойственная данному преобразованию, и обусловленная этим возможность

получения большого коэффициента сжатия информации при малой величине ошибки представления, а также наличие эффективных быстрых алгоритмов вычисления [2] позволяют успешно применять ДКП в ряде приложений. Среди них следует отметить использование при цифровой обработке изображений, где ДКП применяется для уменьшения размерности пространства кодируемых сигналов и винеровской фильтрации, для уменьшения размерности пространства признаков при распознавании образов [3—5] и т. д. ДКП целесообразно использовать для сжатия данных при кодировании дискретизированных непрерывных сигналов датчиков различной информации с целью телеметрии и автоматической классификации. Примером может служить обработка электрокардиограмм [4].

Для использования в специализированных устройствах, работающих в реальном времени (т. е. в темпе поступления отсчетов сигнала), наиболее удобны скользящие преобразования [1]. Скользящий спектральный анализ можно реализовать как с помощью быстрых алгоритмов [6], так и методом цифровой фильтрации путем свертки с зеркальным отображением базисных функций [7, 8]. Быстрые алгоритмы требуют для каждого отсчета обрабатываемого процесса вычисления полного быстрого преобразования, тогда как при применении гребенки цифровых фильтров, согласованных с базисными функциями, учитывается, что при смещении интервала анализа на один шаг по оси времени замещается вновь поступившим только один отсчет, а все остальные в пределах интервала не меняются. Учет результата обработки при предыдущих положениях интервала позволяет получить фильтровым методом меньшее число арифметических операций, приходящихся на один отсчет, чем при быстрых алгоритмах, и сократить за счет этого время анализа текущего спектра, особенно при больших размерах преобразования. Ниже предлагаются алгоритмы вычисления ДКП на скользящем интервале, требующие при реализации малый объем оперативной памяти и небольшое число арифметических операций.

Рекурсивные алгоритмы. Дискретное косинусное преобразование сигнала $s(y)$, заданного на скользящем интервале $y \in [\gamma - N + 1, \gamma]$, $\gamma = N - 1, N, N + 1, \dots$, где N — целое число, определяющее ширину интервала, аналогично [7, 8] для базисных функций ДКП [4, 5] находится из выражения*

$$S_{\gamma}(k) = \frac{\sqrt{2}}{N} c(k) \sum_{x=0}^{N-1} s(\gamma - N + 1 + x) \cos\left(\frac{2x+1}{2N} k\pi\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad c(k) = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \dots, N-1, \\ 1/\sqrt{2}, & k = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Цифровой фильтр, выполняющий ДКП на скользящем интервале, должен иметь согласно [7, 8] следующую импульсную характеристику:

$$h_k(x) = c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} \cos\left[\frac{2(N-1-x)+1}{2N} k\pi\right] = c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^k \cos\left(\frac{2x+1}{2N} k\pi\right), \quad (2)$$

$x = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Учитывая связь между передаточной функцией цифрового фильтра и его импульсной характеристикой через z -преобразование последней [6], получим

$$H_k(z) = c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^k \sum_{x=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2x+1}{2N} k\pi\right) z^{-x} =$$

$$= c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^k (z^{-1} - 1) \cos\left(k \frac{\pi}{2N}\right) \frac{z^{-N} (-1)^k - 1}{1 - 2z^{-1} \cos(k(\pi/N)) + z^{-2}}. \quad (3)$$

* Здесь базисная система ДКП $\{1, \sqrt{2} \cos((2x+1)/2N) k\pi\}$ ортонормирована по мощности $c^2(k) \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2x+1}{2N} k\pi\right) \cos\left(\frac{2x+1}{2N} l\pi\right) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

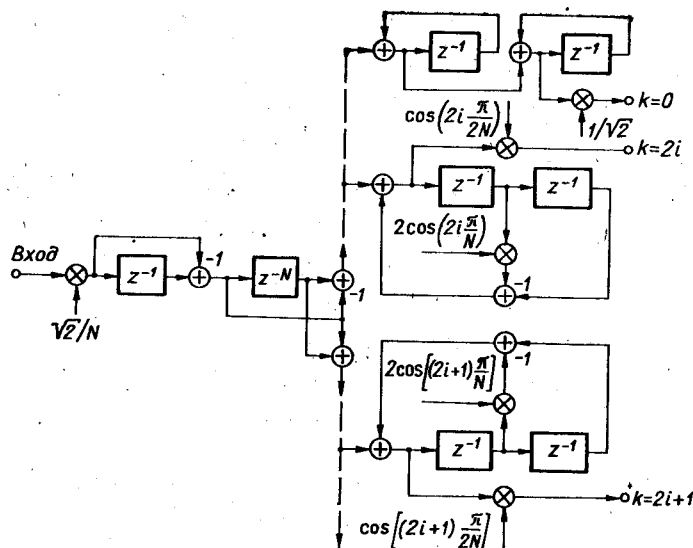


Рис. 1.

Рассмотрим два возможных варианта рекурсивных алгоритмов ДКП на скользящем интервале и определим их параметры: число арифметических операций сложения S и умножения M , которые необходимо выполнить за время между поступлением двух соседних отсчетов сигнала, и количество ячеек оперативной памяти D , описываемых оператором запаздывания z^{-1} .

Вариант 1 реализуется в виде гребенки из N параллельных фильтров по всем k , непосредственно следующей из выражения (3), если для всех N каналов объединить не зависящий от k множитель $z^{-1} - 1$ и разделить каналы гребенки на две группы: четные с $k = 2i$, $i = 0, 1, 2, \dots, [(N-1)/2]$, нечетные с $k = 2i + 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, [N/2] - 1$. Здесь символ $[\cdot]$ означает целую часть числа. В соответствии с делением каналов на две группы имеем

$$(-1)^k [(-1)^k z^{-N} - 1] = \begin{cases} z^{-N} - 1 & \text{при } k = 2i, \\ z^{-N} + 1 & \text{при } k = 2i + 1. \end{cases}$$

В канале $k = 0$ учитывается, что $c(0) = 1/\sqrt{2}$.

Структурная схема алгоритма имеет вид, показанный на рис. 1. В каждом канале включена цифровая цепь 2-го порядка, имеющая два комплексно-сопряженных полюса, расположенных на единичной окружности z -плоскости под углами $\pm k(\pi/N)$ [6], и два нуля при $z = 0$. Такая цепь неустойчива, ибо ее импульсная характеристика теоретически бесконечна и не стремится к нулю при любом времени рассмотрения. Кроме того, двухполюсному фильтру свойственна неравномерная сетка точек на z -плоскости, соответствующая положению полюсов при квантовании коэффициентов [6]. Ошибка положения полюсов сильно зависит от длины разрядного слова коэффициентов и исходного теоретического расположения полюсов фильтра, т. е. в нашем случае от k , возрастая с уменьшением k . Отсюда возникает неравномерная по интервалу определения k ошибка в частоте и амплитуде спектральных компонент. Неравномерной по интервалу будет и дисперсия шумов округления на выходе [6], причем с течением времени дисперсия, растет, а точность определения текущего спектра падает.

Для коррекции вычислений можно предложить два способа. Первый приводит к некоторым потерям информации, но достаточно прост в реализации: происходит периодический сброс информации до нулевого состояния всех блоков. После сброса и до окончания переходного процесса,

т. е. до поступления на вход N отсчетов, выходные данные использовать нельзя.

Второй способ не нарушает непрерывности измерений, но требует для своей реализации дополнительных фильтров, таких же по структуре, как и каналные двухполюсные фильтры. Методика коррекции в этом случае близка к той, которая описана в [7]. В схеме на рис. 1 корректирующий фильтр подключается в некоторый произвольный момент m непосредственно ко входу цепи, реализующей передаточную функцию $z^{-1} - 1$, если $k = 2i$, или с инвертированием знака числа, если $k = 2i + 1$, и, кроме того, это число с обратным знаком запоминается в отдельной ячейке памяти. К моменту $m + 1$ и до момента $m + N$ включительно вход корректирующего фильтра подключается к выходу указанной цепи с инвертированием знака, чисел, если $k = 2i$, или без него при $k = 2i + 1$. В момент $m + N$, кроме числа с выхода цепи с передаточной функцией $z^{-1} - 1$, на вход корректирующего фильтра подается число, записанное в момент m в дополнительную ячейку, и уже после этого содержимое ячеек оперативной памяти корректирующего фильтра пересылается в аналогичные ячейки k -го канала.

Определим параметры D , S и M схемы варианта 1:

$$D = 3N + 1. \quad (4)$$

Для N нечетного

$$S = 2N + 3. \quad (5)$$

При N четном параметр S уменьшается на 1 за счет исключения одного сумматора при $k = N/2$. Если N нечетно и не делится на три, то

$$M = 2N. \quad (6)$$

(Параметр M учитывает операции действительного умножения на $\sqrt{2}/N$, $1/\sqrt{2}$, $1/2$, $\cos(k(\pi/2N))$, $2 \cos(k(\pi/N))$, кроме $0, \pm 1$.)

При N четном и том же условии отсутствия деления на три параметр M так же, как и S , уменьшается на 1. В случае когда N делится на три, M уменьшается на две операции, так как при $k = N/3$ и $k = 2N/3$ коэффициент $2 \cos(k(\pi/N)) = \pm 1$.

Вариант 2. Интересный способ повышения устойчивости в целом всей гребенки из N каналов в случае спектрального анализа на скользящем интервале в базисе дискретных экспоненциальных функций предложен в [7, алгоритм III]. Этот способ основан на представлении

$$1 - z^{-N} = 1/(1 - z^{-N}/(z^{-N} - 1)) \quad (7)$$

с разложением функции $-z^{-N}/(z^{-N} - 1)$ в ряд по k с элементами, в которых в качестве одного из сомножителей используется передаточная функция одно- или двухполюсного фильтра, включенного в канал с номером k . При этом параллельная гребенка реализуется с помощью (7) в виде структуры с параллельной формой в цепи обратной связи. Подобная структура может быть применена и для реализации ДКП на скользящем интервале.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{q=0}^{N-1} z^{-q} \cos \left[2i(N-1-q) \frac{\pi}{N} \right] = (z^{-N} - 1) \frac{z^{-1} - \cos(2i(\pi/N))}{1 - 2z^{-1} \cos(2i(\pi/N)) + z^{-2}}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{N-1} z^{-q} \cos \left[(2i+1)(N-1-q) \frac{\pi}{N} \right] &= (z^{-N} + 1) \times \\ &\times \frac{z^{-1} - \cos[(2i+1)(\pi/N)]}{1 - 2z^{-1} \cos[(2i+1)(\pi/N)] + z^{-2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для примера рассмотрим случай, когда N четное. Делая подстановку (8), (9) в левую часть нижеследующих выражений, получим

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{2}{N} z^{-1} \frac{\cos(2i(\pi/N)) - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos(2i(\pi/N)) + z^{-2}} = -\frac{z^{-N}}{z^{-N} - 1}; \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{2}{N} z^{-1} \frac{\cos[(2i+1)(\pi/N)] - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos[(2i+1)(\pi/N)] + z^{-2}} = -\frac{z^{-N}}{z^{-N} + 1}. \quad (11)$$

Аналогично (7) запишем:

$$1 + z^{-N} = 1/(1 - z^{-N}/(z^{-N} + 1)). \quad (12)$$

Теперь, исходя из (3), (7), (12) и (10), (11), можно представить структурную схему алгоритма для варианта 2 так, как показано на рис. 2. При N нечетном в цепи обратной связи, включающей параллельную форму из $(N+1)/2$ четных по номеру каналов, вместо умножения на коэффициент $2/N$ следует умножать на $2/(N+1)$, а в цепи обратной связи второй такой же структуры, включающей параллельную форму из $(N-1)/2$ нечетных каналов, используется коэффициент $2/(N-1)$. Кроме того, на выходе двухполюсного фильтра каждого канала следует заменить косинусные множители на $((N-1)/N\sqrt{2}) \cos[(2i+1)(\pi/2N)]$ при $k=2i+1$ или на $((N+1)/N\sqrt{2}) \cos(2i(\pi/2N))$ при $k=2i$ и $(N+1)/2N$ при $k=0$.

Определим параметры для второго варианта:

$$D = 2N + 3, \quad (13)$$

$$S = \begin{cases} 4N - 1 & \text{при } N \text{ четном,} \\ 4N + 1 & \text{при } N \text{ нечетном;} \end{cases} \quad (14)$$

$$M = \begin{cases} 2N & \text{при } N \text{ четном,} \\ 2N + 1 & \text{при } N \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (15)$$

Из сопоставления (4)–(6) с (13)–(15) видно, что D уменьшается примерно на N , S возрастает почти в 2 раза, а M остается практически тем же самым. Схема на рис. 2 в сравнении со схемой, изображенной на рис. 1, является менее быстродействующей из-за увеличения S , но зато более устойчивой. Следует отметить, однако, что абсолютная устойчивость здесь чисто теоретическая. Реально же при выполнении арифметических операций с конечной точностью знаменатель в правой части соотношений (7) и (12) будет иметь не только полюсы, но и нули, поэтому длина импульсной характеристики станет неограниченной, а сама схема может быть неустойчивой.

Нерекурсивные алгоритмы. Создать абсолютно устойчивую схему алгоритма можно, если исключить все рекурсивные блоки, т. е. сделать так, чтобы текущие значения последовательности на выходе k -го канала в явной форме зависели только от текущих и конечного чисел предшествующих отсчетов входной последовательности и не зависели от предшествующих отсчетов выходной последовательности. При этом разностное уравнение, которое описывает k -й канал, становится нерекурсивным.

Рассмотрим вначале вариант нерекурсивного алгоритма, который можно реализовать при любом N .

Вариант 3 основан на замене сомножителя $z^{-N}(-1)^k - 1$ в (3) произведением двучленов 1-й степени с использованием N корней уравнения $z^{-N} = 1$ при $k=2i$ и N корней уравнения $z^{-N} = -1$ при $k=2i+1$. После преобразований из (3) получим для N четного.

$$H_{k,1}(z) = \begin{cases} c(2i) \frac{\sqrt{2}}{N} (z^{-1} + 1) \prod_{\substack{q=0, \\ q \neq i}}^{N/2-1} P(z, 2q) \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right) & \text{при } k = 2i, \\ c(2i+1) \frac{\sqrt{2}}{N} (z^{-1} - 1) \prod_{\substack{n=0, \\ n \neq i}}^{N/2-1} P(z, 2n+1) \cos\left[(2i+1) \frac{\pi}{2N}\right] & \text{при } k = 2i+1 \end{cases} \quad (16)$$

и для N нечетного

$$H_{k,2}(z) = \begin{cases} c(2i) \frac{\sqrt{2}}{N} \prod_{\substack{q=0, \\ q \neq i}}^{(N-1)/2} P(z, 2q) \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right) & \text{при } k = 2i, \\ c(2i+1) \frac{\sqrt{2}}{N} (z^{-2} - 1) \prod_{\substack{n=0, \\ n \neq i}}^{(N-3)/2} P(z, 2n+1) \cos\left[(2i+1) \frac{\pi}{2N}\right] & \text{при } k = 2i+1, \end{cases} \quad (17)$$

где $P(z, l) = 1 - 2z^{-l} \cos((\pi/N)l) + z^{-2}$, $l = 2q$ при $k = 2i$ и $l = 2n+1$ при $k = 2i+1$.

Параллельная N -канальная форма структуры нерекурсивного алгоритма, непосредственно следующая из выражений (16), (17), невыгодна при реализации, так как имеет большую величину параметров D , S и M . Параметры можно уменьшить, если учесть, что два любых соседних по i канала в четной и нечетной по номеру k группах каналов параллельной структуры при четном N имеют $N/2 - 2$ попарно одинаковых каскада, реализующих передаточные функции $P(z, l)$. При нечетном N количество таких каскадов равно $(N-3)/2$ в группе $k = 2i$ и $(N-5)/2$ в группе $k = 2i+1$. Одинаковые каскады можно сделать общими для ряда каналов, разбив каналы парами, затем пары опять парами и т. д. и включив одинаковые каскады в начале каждой пары. Наиболее компактная структура получается в том случае, если N является степенью двух. Рассмотрим этот случай более подробно, тем более что при $N = 2^r$, $r > 0$ — целое число, возможен еще один вариант схемного построения для нерекурсивного алгоритма, так что появляется возможность сравнить оба варианта по параметрам.

При $N = 2^r$ попарное разбиение каналов проходит без остатка в четной и нечетной группах номеров каналов, причем после объединения каскадов в каждой паре остаются два каскада, для которых значения q или n в выражении (16) равны номеру i противоположного канала в данной паре. При попарном объединении общей части каскадов соседних

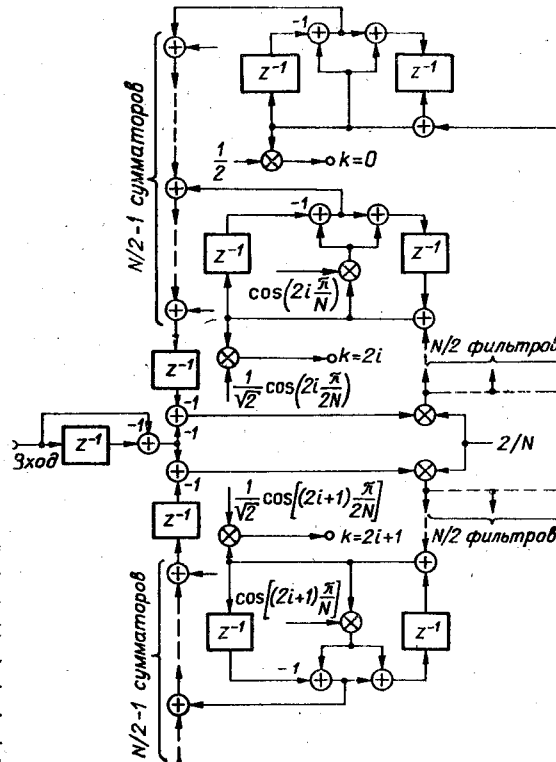


Рис. 2.

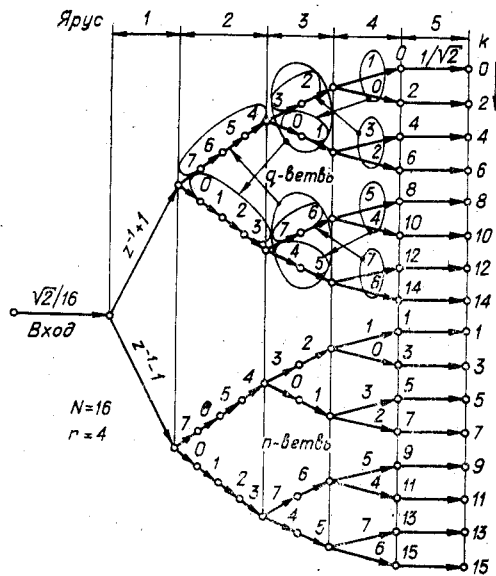


Рис. 3.

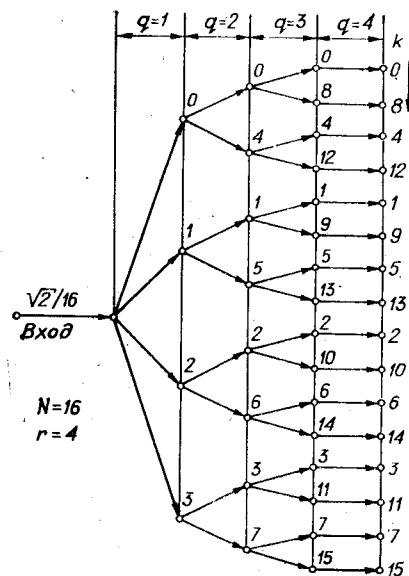


Рис. 4.

пар, кроме тех четырех, что уже были (в каждой паре по два), остаются необъединенными еще четыре (по два на пару), затем на следующем этапе уже восемь и т. д. Система нумерации каскадов по q и n в соответствии с (16) весьма проста (крест-накрест в соседних ярусах дерева структуры), что видно из рис. 3, на котором изображен ориентированный сигнальный граф структуры алгоритма в виде дерева с $r+1$ ярусами ($r=4$). Из корня дерева в начальную вершину 1-го яруса исходит дуга весом $\sqrt{2}/N$. Две дуги 1-го яруса имеют вес (коэффициент передачи) соответственно $z^{-1}+1$ для $k=2i$ и $z^{-1}-1$ для $k=2i+1$. Остальные ярусы, кроме самого последнего ($r+1$)-го яруса, образованы простыми ориентированными цепями с весами в виде произведения 2^{r-2} функций типа $P(z, l)$ во втором ярусе и до одной функции (одной дуги) такого типа в r -м ярусе. Одной функции типа $P(z, l)$ на рис. 3 соответствует одна дуга с номером, определяемым q или n в выражении (16). Дуги последнего ($r+1$)-го яруса имеют веса $\cos(i\pi/N)$ или $\cos[(2i+1)\pi/2N]$ для $i=1, 2, \dots, N/2-1$ и $1/\sqrt{2}$ для $k=0$.

Параметры алгоритма варианта 3 с учетом (16) (см. рис. 3) имеют следующие значения:

$$D = 2(r-1)N + 2; \quad (18)$$

$$S = (r-1)(2N-1) + 2; \quad (19)$$

$$M = (r-1)(N-2). \quad (20)$$

Вариант 4 является нерекурсивной реализацией алгоритма ДКП, основанной на представлении импульсной характеристики (2) в виде вещественной части комплексной экспоненциальной функции

$$h_n(x) = c(k)(\sqrt{2}/N)(-1)^k \operatorname{Re} \{ \exp(-j((2x+1)/2N)k\pi) \}, j = \sqrt{-1}. \quad (21)$$

Определим передаточную функцию цифрового фильтра, имеющего импульсную характеристику вида (21), предполагая, что операция Re выполняется на выходе. В таком фильтре операции сложения и умножения, а также ячейки памяти являются комплексными*.

* Одно комплексное сложение требует двух арифметических операций сложения, одно комплексное умножение — четырех арифметических операций умножения и двух операций арифметического сложения; комплексная ячейка памяти состоит из двух обычных ячеек соответственно для хранения вещественной и мнимой частей комплексного числа.

z -преобразование (21) до выполнения операции Re можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_{h, \text{ком}}(z) &= c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} (-1)^k \exp\left(-jk \frac{\pi}{2N}\right) \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-j \frac{\pi}{N} kx\right) z^{-x} = \\ &= c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} \exp\left(jk \frac{\pi}{2N}\right) \frac{z^{-N} - (-1)^k}{z^{-1} - \exp(jk(\pi/N))}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22) в принципе может служить основой для построения параллельных N -канальных структур с рекурсивными блоками в каналах, однако данные структуры по сравнению с аналогичными для вариантов 1 и 2 за счет комплексности всех операций и ячеек памяти имеют гораздо большие значения параметров D , S и M , и поэтому их применение не целесообразно.

Рассмотрим случай $N = 2^r$. Воспользовавшись формулой разности квадратов двух чисел и тождеством $(-1)^k = [\exp(jk(\pi/N))]^N$, из (22) получим

$$H_{h, \text{ком}}(z) = c(k) \frac{\sqrt{2}}{N} \exp\left(jk \frac{\pi}{2N}\right) \prod_{q=1}^r \left[z^{-2^{r-q}} + \exp\left(jk \frac{\pi}{2^q}\right) \right]. \quad (23)$$

Подобно тому, как это было сделано при построении схемы алгоритма для варианта 3 при $N = 2^r$, здесь, используя (23), также можно, разделив вначале определенным образом параллельные каналы по номеру k , сделать общим ряд каскадов в соседних каналах пары, затем между парами и т. д. Для пояснения структуры получающегося в этом случае алгоритма удобно воспользоваться ориентированным графом прохождения сигналов. Для $N = 16$ он показан на рис. 4. Приведем правила построения такого графа в общем случае при $N = 2^r$.

1. Граф представляет собой дерево, имеющее r ярусов. Вершины, являющиеся концами дуг q -го яруса, где $q = 1, 2, \dots, r-1$, относятся к q -му ярусу. Количество вершин в q -м ярусе равно 2^{q+1} для $q = 1, 2, \dots, r-1$ и 2^r для $q = r$, т. е. такое же, как в $(r-1)$ -м ярусе.

2. Вершины q -го яруса для $q = 1, 2, \dots, r-1$ нумеруются следующим образом. Натуральный ряд чисел $0, 1, 2, \dots, 2^{q+1} - 1$ записывается в двоичной форме с $q+1$ разрядами, затем $q-1$ младших разрядов подвергаются двоичной инверсии. Оставшиеся два старших разряда без изменения порядка следования перемещаются в начало разрядной сетки, становясь самыми младшими разрядами. Получившиеся в результате такого преобразования числа по порядку, сверху вниз, присваиваются вершинам q -го яруса. При этом естественную нумерацию $0, 1, 2, 3$ имеют только вершины 1-го яруса. Вершины $(r-1)$ -го и r -го ярусов имеют одинаковую нумерацию, соответствующую номеру базисной функции ДКП или номеру канала k .

3. Вес дуг графа в соответствии с (23) для ярусов с номерами $q = 1, 2, \dots, r-1$ определяется выражением

$$H_{q, m_q}(z) = z^{-2^{r-q}} + \exp\left(jm_q \frac{\pi}{2^q}\right), \quad (24)$$

где m_q — номер вершины q -го яруса, которой заканчивается данная дуга, причем $m_{r-1} = k$. Вес дуг r -го яруса для всех вершин, кроме 0-й, определяется множителем в (23) при $q = r$ и коэффициентом $\exp(jk(\pi/2N))$, т. е.

$$H_{r, k}(z) = [z^{-1} + \exp(jk(\pi/N))] \exp(jk(\pi/2N)). \quad (25)$$

Дуга, заканчивающаяся 0-й вершиной r -го яруса, имеет вес $H_{r, 0}/\sqrt{2}$.

4. Корень дерева соединяется с вершиной на входе 1-го яруса дугой весом $\sqrt{2}/N$.

Вещественная часть чисел в вершинах r -го яруса представляет собой значения текущего спектра в базисе ДКП.

Исходя из правил построения графа, согласно выражениям (24), (25), с учетом сделанного выше замечания о соотношении комплексных операций и ячеек памяти с арифметическими операциями и обычными ячейками можно определить параметры

$$D = 2D_k = 2(2r - 1)N; \quad (26)$$

$$S = 2S_k + 2M_k = 12(N - 1) - 8r; \quad (27)$$

$$M = 4M_k + 2 = 12N - 16r - 6, \quad (28)$$

где D_k , S_k и M_k — число комплексных ячеек памяти и операций сложения, умножения, причем M_k не учитывает умножения на ± 1 , $\pm j$, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/N$.

Из сравнения (26)—(28) с (18)—(20) следует, что $D_4/D_3 > 2$, $S_4 < S_3$ при $r > 6$ и $M_4 < M_3$ при $r > 12$, где индексы при D , S и M определяются номером варианта. Аналогичное сопоставление параметров приведенных выше рекурсивных и нерекурсивных алгоритмов показывает, что любой из нерекурсивных алгоритмов уступает по всем параметрам любому рекурсивному, начиная с $r = 4$. Однако нерекурсивные алгоритмы являются абсолютно устойчивыми независимо от квантования коэффициентов и округления результатов арифметических действий. Изложенное позволяет сделать вывод о том, что при выборе того или иного из рассмотренных алгоритмов для реализации следует принимать во внимание конкретные условия решаемой задачи (такие, например, как длительность анализируемого процесса, точность измерения и максимальная ширина спектра), а также учитывать то, к какому из параметров предъявляются наиболее жесткие требования с точки зрения технического исполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
2. Chen Wen-Hsiung, Smith C. H., Fralick S. C. A Fast Computational Algorithm for Discrete Cosine Transform.— IEEE Trans. on Comm., 1977, vol. COM-25, N 9, p. 1004—1009.
3. Mauersberger W., Nawrath R. Haar, Walsh, Slant and Discrete Cosine Transform Coding of Images. A Comparison.— In: Electromagn. Compatibility, June 1977. 2-nd Symp. and Techn. Exhib. Montreux, 1977.
4. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.
5. Ahmed N., Natarajan T., Rao K. R. Discrete Cosine Transform.— IEEE Trans. on Computers, 1974, vol. C-23, N 1, p. 90—93.
6. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
7. Оботнин А. Н., Страшинин Е. Э. Алгоритмы определения скользящего спектра.— Автометрия, 1975, № 1.
8. Зеленков А. В. Нерекурсивные алгоритмы спектрального анализа на скользящем интервале в базисе функций Виленкина — Крестенсона.— Радиотехника и электроника, 1976, № 12.

Поступила в редакцию 9 июля 1981 г.

УДК 621.391.14

В. А. ЛЕВИН

(Ленинград)

О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ОКНАХ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В практическом спектральном анализе часто используется следующая оценка спектральной плотности:

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{R}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} w_k \hat{R}(k) \cos k\lambda, \quad -\pi \leq \lambda < \pi, \quad (1)$$