А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1982

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.391

Г. С. МАГДАНОВ
(Казань)

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Одним из эффективных средств цифровой обработки сигналов при оценке, например, математического ожидания стационарных и медленно-меняющихся случайных процессов является применение оператора экспоненциального сглаживания. Цифровой алгоритм оператора построен на решении следующего рекуррентного соотношения [1]:

$$y(nT) = qx(nT) + (1-q)\,y(nT-T), \tag{1}$$

где $T = 1/f_д$ — интервал дискретизации исходного сигнала; $y(nT)$ и $x(nT)$ — соответственно выходная и входная текущие дискреты; q — постоянная сглаживания

Постановка задачи. Реализация решения (1) возможна в специализированных вычислительных устройствах [2], содержащих процессор для выполнения операций сложения, умножения и обмена данными с ОЗУ, в котором хранятся весовые коэффициенты, блок управления и т. д., или в цифровых сглаживающих устройствах [3]. Для перечисленных устройств характерны большой объем оборудования, сложная схема коммутации узлов и малое быстродействие. В данной работе предложено многозвенное цифровое сглаживающее устройство, в основу синтеза которого были положены требования простоты технической реализации и повышенного быстродействия.

Теоретический анализ. Полагая в (1) $q=1/2$, а $T = 1$, т. е. задавая дискретную последовательность в функции только номеров отсчета, получим

$$y_n = (1/2)(x_n + y_{n-1}). \tag{2}$$

Соотношение (2) может быть реализовано цифровым сглаживающим устройством (ЦСУ) 1-го порядка, состоящим из l-разрядного параллельного накапливающего сумматора, содержащего схему сдвига вправо в каждом разряде. Для ЦСУ 1-го порядка оператор экспоненциального сглаживания определяется выражением [1]

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} x_{n-i}. \tag{3}$$

Рассмотрим каскадную форму реализации ЦСУ высокого порядка, например состоящего из m последовательно соединенных звеньев (ЦСУ 1-го порядка). В этом случае, используя формулу (3) и метод математической индукции, связь между входной и выходной дискретными последовательностями для m-звенного ЦСУ можно выразить следующим соотношением в матричной форме:

$$y_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+m-2}{m-1} q^{i+m-1} x_{n-i}, \tag{4}$$

где $q=1/2$, $\binom{i+m-2}{m-1}$ — биномиальные коэффициенты, $m = \overline{(1, M)}$.

Запишем из (4) дискретную весовую функцию устройства (импульсную характеристику)

$$h_{mi} = \binom{i+m-2}{m-1} q^{i+m-1}. \tag{5}$$

На рис. 1 представлены графики импульсной характеристики m-звенного ЦСУ, рассчитанной по соотношению (5) при различных значениях m. Определим сумму весовых коэффициентов из (5) при $n \to \infty$:

$$S_h = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i+m-2}{m-1} q^{i+m-1}, \tag{6}$$

для чего воспользуемся известной формулой суммы степенного ряда, получаемой последовательным m-кратным дифференцированием ряда $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$:

$$S_m = \sum_{i=m-1}^{\infty} \binom{i}{m-1} q^{i-m+1} = \frac{1}{(1-q)^m}. \tag{7}$$

Сменив в (6) нижний предел суммирования, с учетом (7) для $q = 1/2$ имеем

$$S_h = \sum_{i=m-1}^{\infty} \binom{i}{m-1} q^{i+1} = q^m \sum_{i=m-1}^{\infty} \binom{i}{m-1} q^{i-m+1} = \left(\frac{q}{1-q}\right)^m = 1. \tag{8}$$

Результат (8) трактуется [4, 5] как условие несмещенности оценки математического ожидания сглаживаемого случайного процесса, выполняемое в рассматриваемом ЦСУ, т. е. весовые коэффициенты ЦСУ нормированы таким образом, что не искажается величина постоянной составляющей сглаживаемой реализации.

Как известно, эффективность сглаживания можно оценивать по отношению интенсивности флуктуаций исходного случайного процесса до и после применения ЦСУ: $k_э = \sigma_x^2/\sigma_y^2$, где $k_э$ — коэффициент эффективности сглаживания, σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсия процесса соответственно до и после сглаживания.

Оценим эффективность сглаживания однозвенного ЦСУ, используя априорную информацию о входной дискретной последовательности. Например, пусть эта последовательность — аддитивная смесь постоянной составляющей сигнала и некоррелированного шума с нулевым средним и равномерным распределением в диапазоне $+A/2$, $-A/2$. Дисперсию шума на выходе для данного случая можно определить по формуле, приведенной в [6]:

$$\sigma_y^2 = \frac{A^2}{12} \sum_{i=0}^{\infty} h_i^2,$$

где $A^2/12 = \sigma_x^2$ — дисперсия шума на входе. Из (3) имеем $h_i = q^{i+1}$, тогда для $q = 1/2$

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 = \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{1}{3},$$

т. е. среднее значение выходной мощности шума составит треть от ее значения на входе.

Запишем передаточную функцию устройства в операторной форме [7]: $K(p) = [q/(1-(1-q)e^{-pT})]^m$, а при переводе последней в частотную область и $q = 1/2$ получим соответственно амплитудно-частотную

$$H(f/f_д) = [5 - 4\cos(2\pi f/f_д)]^{-m/2} \tag{9}$$

и фазочастотную

$$\Psi(f/f_д) = -m \operatorname{arctg}[\sin(2\pi f/f_д)/(2 - \cos(2\pi f/f_д))] \tag{10}$$

характеристики.

Известно, что переходная характеристика определяется как отклик устройства при подаче на его вход единичной ступенчатой функции вида

$$x(nT) = \begin{cases} L = 1 & \text{при } n = 1, 2, 3, \ldots, \infty, \\ 0 & \text{при } n \leqslant 0, \end{cases}$$

а постоянная времени τ_{0m} (в функции интервала дискретизации T) находится из условия, что уровень выходного сигнала за это время достигнет уровня входного сигнала (дискреты) с заданной погрешностью ε, где $\varepsilon \geqslant |L - y_m(nT)|$. Очевидно, что для рассматриваемого m-звенного ЦСУ последнее наступит тогда, когда после очередной n-й итерации выполнится условие $\varepsilon \geqslant L h_{mn}$, т. е. при $L = 1$

$$\varepsilon \geqslant \binom{n+m-2}{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1}. \tag{11}$$

Решая неравенство (11) численным методом относительно n, получим постоянную времени ЦСУ при различных значениях m. В частности, для однозвенного ЦСУ ($m = 1$) постоянная времени составит $\tau_{01} \leqslant \left(1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) T$.

Важной характеристикой устройства является фазовый сдвиг (запаздывание) Δt_m между выходной текущей дискретой с конечного m-го звена ЦСУ, принимаемой за оценку математического ожидания сглаживаемого процесса и относящейся (в силу интегрирующего характера работы устройства) к некоторому прошлому моменту времени, и входной текущей дискретой в данный момент времени. Например, для цифровых сглаживающих устройств, реализующих оператор текущего среднего [1],

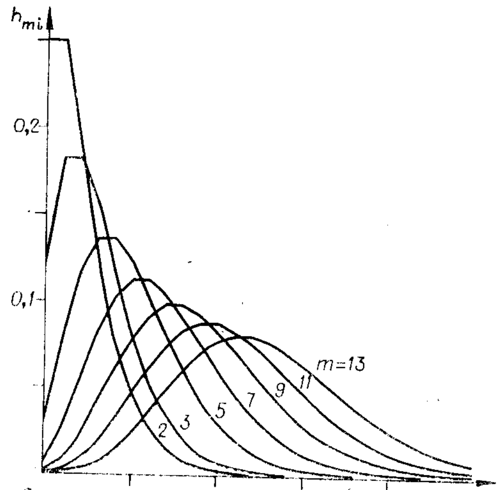

Рис. 1.

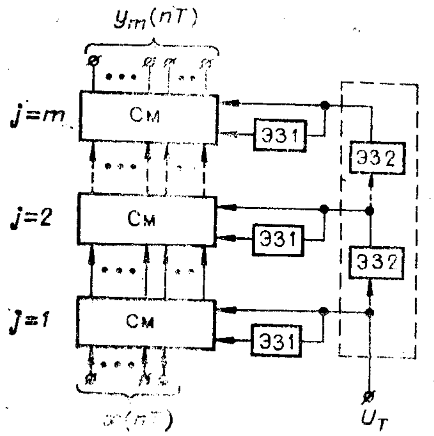

Рис. 2.

выходную текущую дискрету, как правило, относят к середине заданного интервала осреднения (сглаживания), т. е. фазовый сдвиг $\Delta t_c = (NT)/2$, где NT — интервал интегрирования (N — объем выборки).

Для определения величины запаздывания Δt_m в рассматриваемом m-звенном ЦСУ, реализующем оператор экспоненциального сглаживания, из (4) вычислим n-е значение выходной дискретной последовательности, считая, что входной сигнал изменяется по линейному закону $x_{n-i}=i$ (т. е. аддитивная входная дискретная последовательность характеризуется математическим ожиданием, изменяющимся по линейному закону):

$$y_{mn} = \sum_{i=1}^{n} h_{mi} i = \sum_{i=m-1}^{n} \binom{i}{m-1} q^{i+1} i. \qquad (12)$$

В случае $x_{n-i}=C$ (константа) для той же цели можно воспользоваться известной формулой вычисления абсциссы центра тяжести плоской фигуры, ограниченной дискретной весовой функцией рассматриваемого ЦСУ (см. рис. 1):

$$\eta_c^{(n)} = \left[\sum_{i=1}^{n} z_i f(z_i)\, \Delta z_i\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\, \Delta z_i\right].$$

Так как $z_i = i$, $f(z_i) = h_{mi}$ и $\Delta z_i = T = 1$, то с учетом (8) при $n \to \infty$ имеем

$$\eta_c^{(n)} = \left[\sum_{i=1}^{n} h_{mi} i\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} h_{mi}\right] = \sum_{i=1}^{n} h_{mi} i. \qquad (13)$$

Равенство между (12) и (13) позволяет однозначно определить запаздывание для обоих типов входных сигналов: постоянного и линейно-меняющегося.

Положив $m=2$, умножим обе части уравнения (7) на q и, продифференцировав его m раз, получим систему из m степенных рядов, суммы которых вычисляются по следующей формуле:

$$\sum_{i=m-1}^{\infty} \binom{i}{m-1} q^{i+1-m} i = \frac{q+(m-1)}{(1-q)^{m+1}}. \qquad (14)$$

После преобразования (12) с учетом (14) для $q=1/2$ имеем

$$y_{mn} = \sum_{i=m-1}^{\infty} \binom{i}{m-1} q^{i+1-m} q^m i = \frac{q+(m-1)}{1-q} \left(\frac{q}{1-q}\right)^m = m + (m-1). \qquad (15)$$

Формула (15) получена для начального момента (отсчета) $i=m-1$. По индукции запишем общее выражение (15) для любого k-го начального момента:

$$y_{mn} = \sum_{i=k}^{\infty} h_{mi} i = m + k. \qquad (16)$$

Полученный результат (16) можно рассматривать как отклик ЦСУ на линейно-меняющийся входной сигнал. Соотношение (16) позволяет определить фазовый сдвиг (запаздывание) для обоих типов входных сигналов, который прямо пропорционален числу звеньев:

$$\Delta t_m = mT. \qquad (17)$$

Способом, приведенным выше, можно получить отклик ЦСУ и на нелинейный входной сигнал типа $x_{n-i}=i^2$:

$$y_{mn} = \sum_{i=k}^{\infty} h_{mi} i^2 = (m+k)^2 + 2m. \qquad (18)$$

Как видно из (18), для нелинейного входного сигнала соотношение (17) не выполняется ввиду дополнительного запаздывания, пропорционального $2m$.

При проектировании аппаратуры анализа случайных процессов с применением рассматриваемого ЦСУ результат (17) обусловливает простоту решения задачи центрирования стационарных и медленно-меняющихся случайных процессов путем использования сдвиговых регистров.

Реализация. Блок-схема ЦСУ представлена на рис. 2. ЦСУ содержит m последовательно соединенных звеньев, каждое из которых включает в себя параллельный накапливающий сумматор См и элемент задержки ЭЗ1 в цепи управления сдвигом вправо на один разряд, и датчик тактов на $m-1$ элементах задержки ЭЗ2, выходы которого подключены к соответствующим шинам управления сумматором каждого звена.

Определение текущей дискреты сглаженного процесса в каждом j-м звене в соответствии с уравнением (2) происходит за цикл, состоящий из двух тактов: в первом — тактирующий сигнал производит сложение, во втором — этот же сигнал, задержанный на время сложения t_1, сдвигает полученный результат вправо на один разряд. Через время (t_1+t_2), равное времени сложения и сдвига, тактирующий сигнал поступает на следующее $(j+1)$-е звено и выполняет в нем операции, аналогичные вышеописанным.

Нетрудно определить максимально допустимую частоту работы устройства $f_д$ (частоту дискретизации исходного сигнала):

$$f_д \leqslant 1/(2t_1+t_2). \qquad (19)$$

При выполнении операции сглаживания неизбежны ошибки, связанные с конечностью длин регистров (сумматоров) в ЦСУ и обрабатываемых операндов. Основными источниками ошибки $e_{mn} = y_{mn} - z_{mn}$, где y_{mn} — приближенная (реальная), а z_{mn} — идеальная величина выходной дискреты сглаженного процесса, являются: 1) квантование входного сигнала на ряд дискретных уровней с последующим преобразованием в c-разрядный целочисленный код; 2) накопление ошибок округления (усечения, отбрасывания) при совершении арифметических операций.

Влияние первой причины на точность цифровой обработки сигналов достаточно широко освещено в литературе (см., например, [6]).

Рассмотрим ошибку усечения (отбрасывания), возникающую в каждом сумматоре ЦСУ при выполнении операции деления (сдвига вправо на один разряд), если результат предыдущей операции (сложения) нечетен. Знак ошибки всегда отрицательный, а ее максимальное значение равно половине цены младшего разряда сумматора. Справедливо полагая поступление на вход каждого сумматора ЦСУ четных и нечетных целочисленных дискрет событием равновероятным, ошибку усечения можно считать независимой случайной величиной с равномерным распределением в области $(0, -1/2)$ и средним значением $\bar{e}_j = -1/4$, где $j=(\overline{1, m})$ — номер звена.

Для повышения точности сглаживания следует увеличить разрядность каждого сумматора ЦСУ на r дополнительных разрядов (для дробной части числа). В этом

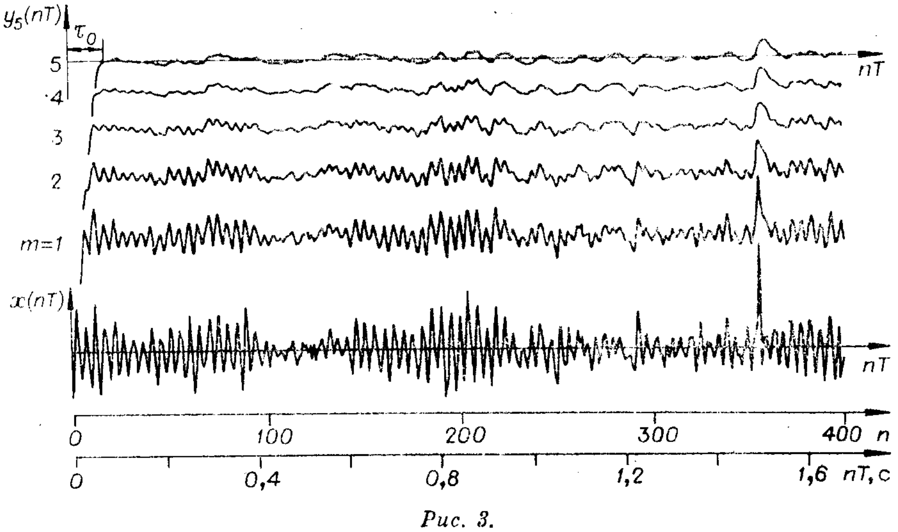

Рис. 3.

случае при общей разрядности сумматора $l_j=c+r$, где c — число основных разрядов, среднее значение результирующей ошибки ЦСУ от усечения составит

$$\bar{e}_m=-m2^{-(2+r)}. \tag{20}$$

Для того чтобы эта погрешность не возрастала с ростом числа звеньев ЦСУ, необходимо добавлять в сумматор каждого звена, начиная со второго, еще $(j-1)$ дополнительных разрядов, т. е. $l_j=c+r+(j-1)$. Тогда результирующая погрешность усечения составит постоянную величину, равную $\bar{e}_m=-2^{-(2+r)}$. Однако такое схемное решение нетехнологично. Очевидно, при выборе числа младших дополнительных разрядов r необходимо добиваться компромисса между точностью сглаживания (см. формулу (20)) и объемом аппаратурных затрат.

Результаты моделирования. На рис. 3 приведены графики исходной и сглаженных значений дискретной реализации (усилие силовой установки на номинальном режиме), полученные при моделировании работы 5-звенного ЦСУ на управляющей ЦЭВМ.

Выводы

Отличаясь простотой технической реализации, рассмотренное ЦСУ может найти эффективное применение в качестве цифрового рекурсивного фильтра низких частот в аппаратуре корреляционного и спектрального анализа случайных процессов. Как видно из (19), при современной элементной базе максимальная частота работы ЦСУ может достигать значений порядка 1—1,5 МГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Вопросы прикладного анализа случайных процессов.— М.: Сов. радио, 1968.
2. **Гольденберг Л. М., Левчук Ю. П., Поляк М. Н.** Цифровые фильтры.— М.: Связь, 1974.
3. **Саакян Э. А., Бахчиев Г. А., Погребецкий П. И.** Цифровое сглаживающее устройство. (Автор. свид-во № 356644).— БИ, 1972, № 32.
4. **Сенин А. Г.** Фильтрация и обнаружение непрерывных сигналов по дискретной последовательности с распределением Пуассона.— Автометрия, 1974, № 2.
5. **Клоков Ю. Л., Цирлин А. М.** Центрирование реализаций случайных процессов при помощи ЦВМ.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 3.
6. **Голд Б., Рейдер Ч.** Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.
7. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Сов. радио, 1971.

Поступило в редакцию 3 мая 1977 г.;
окончательный вариант — 12 июня 1979 г.

УДК 519.853.6 : 681.3

А. С. ЗАГОРУЙКО

(Новосибирск)

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРО-ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Назначение. Пакет предназначен для определения локального минимума скалярной функции Ф(X), заданной в евклидовом пространстве E_N на N-мерном гиперпараллелепипеде, и решения N-мерных систем $\Phi_i(X)$ $(i=\overline{1,N})$ нелинейных алгебро-трансцендентных уравнений (СНАУ) при различных режимах его использования; пакет написан на языке ФОРТРАН и эксплуатируется на ЭВМ АСВТ М-4030.

Обращение.

CALL KMIPAK (FUN, N, X, XMIN, XMAX, Z,
EPSF, EPSX, EPS1, JMAX, Y, NP, LS, IG, IPE, JM)

Описание параметров. FUN — имя подпрограммы пользователя, имеющей вид SUBROUTINE FUN (N, X, Z, FP). Тело данной подпрограммы должно описывать вместе с задаваемым ниже параметром LS минимизируемую функцию, значение которой для каждого N-мерного вектора переменных X заносится в Z $(Z=\Phi(X)$ и $\underline{LS=0})$ или систему N нелинейных уравнений в виде N невязок $(FP(I)=\Phi_I(X)$, $I=\overline{1,N}$; $LS=1)$.

N — количество переменных.