

где $x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$, а ξ_k — система узлов, в которых задана правая часть, $k = 1, \dots, n$.

Вычисляются первые четыре момента ядра

$$M_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} s^\nu K(s) ds, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Для всех $k = 1, \dots, n$ определяются $a_k = M_0 A_k$, $b_k = M_0(B_k + 3a_k M_1)$, $c_k = M_0(C_k + 2b_k M_1 - 3a_k M_2)$, $d_k = M_0(D_k + c_k M_1 - b_k M_2 - a_k M_3)$, а затем строится функция $\sigma(x) = \sigma_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k$, $x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$, приближающая решение исходного уравнения.

Все перечисленные методы содержат параметр, изменяя который можно добиться наилучшего достижимого приближения. В методе 2.1 это параметр α , в методах 2.2 и 2.3 — число итераций и (или) параметр γ (см. 2.3), а в методе 2.4 — число узлов функции f , по которым ведется сплайн-аппроксимация.

Как уже отмечалось, описываемая система обладает возможностями непосредственного графического представления результатов расчета в процессе решения и дает исследователю возможность ускорить, замедлить или остановить процесс получения приближенного решения по достижению визуального оптимума искомой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. П. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
2. Обухов Ю. В., Платонов С. А. Диалоговая система построения графиков в измерительно-вычислительной системе коллективного пользования.— УСиМ. 1981, № 6.
3. Тихонов А. Н. Некорректно поставленные задачи и методы их решения.— В кн.: Труды Всесоюз. школы молодых ученых «Методы решения некорректных задач и их применения». М.: МГУ, 1974.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
5. Галкин В. Я. и др. О методах решения стохастических систем линейных алгебраических уравнений.— В кн.: Обработка и интерпретация физических экспериментов. М.: МГУ, 1977, вып. 6, с. 61—97.
6. Косачевская Л. Л., Романовцев В. В., Шарлинский И. Е. Об одном итерационном процессе численного решения СЛАУ.— Журнал вычисл. математики и матем. физики, 1981, т. 21, № 6.
7. Strand O. N. Theory and Methods Related to the Singular-Function Expansion and Landweber's Iteration for Integral Equation of the First Kind.— SIAM J. Numer. Anal., 1974, vol. 11, N 4.
8. Beniaming I., Deutsch M. A Spline-Based Method for Experimental Data Deconvolution.— Comput. Phys. Comm., 1980, vol. 21, p. 271—277.

Поступила в редакцию 27 августа 1981 г.

УДК 621.372.542

А. В. ЗЕЛЕНКОВ

(Пула)

ИЗМЕРЕНИЕ ВЗАИМНОГО ВРЕМЕННОГО СДВИГА ОТРАЖЕНИЙ В АДДИТИВНОМ СИГНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ НУЛЕЙ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Введение. Согласно определению комплексного кепстра [1], если нули и полюсы z -преобразования сигнала $S(z)$ находятся на единичной окружности, то кепстр, строго говоря, не существует. К сигналам такого вида относятся не только аддитивные сигналы, у которых нули появляются в результате суммирования, например, двух равновеликих отраже-

ний, но и такие, элементарные колебания которых сами имеют z -преобразование с нулями на единичной окружности. Среди последних можно отметить прямоугольные, косинусоидальные, симметричные треугольные и трапецидальные импульсы (аналитическое определение соответствует ГОСТу 16465—70) и т. д., а также сигналы, формируемые на выходе стационарной линейной системы, если на ее вход подать перечисленные выше импульсы. Отсюда видно, что число таких элементарных колебаний достаточно велико и, что главное, среди них есть колебания, которые часто используются на практике.

Нули на единичной окружности приводят к нулям в модуле спектральной функции $S(e^{j\omega T})$ (ω — круговая частота, T — период дискретизации по времени, $j = \sqrt{-1}$), соответствующей $S(z)$ при $z = e^{j\omega T}$. При этом там, где $|S(e^{j\omega T})| = 0$, вещественная часть комплексного логарифма $\text{Re}\{\ln[S(e^{j\omega T})]\} = \ln|S(e^{j\omega T})| = -\infty$, а мнимая часть $\text{Im}\{\ln[S(e^{j\omega T})]\} = \arg[S(e^{j\omega T})]$, требующая разворачивания для удовлетворения условию однозначности и обобщенному принципу суперпозиции [1], не определена и в силу конечной точности вычислений может принимать любые значения с разбросом в диапазоне $\pm\pi$. Однако, применяя совместно с кепстральной рассмотренную ниже обработку, можно измерить взаимный временной сдвиг отражений в аддитивном сигнале, сформированном на основе элементарных колебаний с нулями в $S(e^{j\omega T})$. Такие алгоритмы могут найти применение в цифровых системах обработки аддитивных сигналов с помощью кепстральных методов, позволяющих при измерении взаимного сдвига отражений исключить влияние формы элементарного колебания и задержки сигнала. Последнее очень важно, ибо существенно упрощает синхронизацию измерительной аппаратуры, если необходима привязка к первому отражению.

Комплексный кепстр на конечном интервале $[0, N)$. Определение. Комплексный кепстр $C(n)$, определенный на интервале $[0, N)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, для сигнала $s(n)$, заданного на том же интервале, можно вычислить, используя два алгоритма. Согласно первому из них [1, 2],

$$C_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} \ln[D(f)] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nf\right), \quad (1)$$

где

$$D(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nf\right) \quad (2)$$

— дискретное преобразование Фурье (ДПФ), причем $D(f) = S(e^{j(2\pi/N)f})$, $f = 0, 1, 2, \dots, N-1$, — номера отсчетных точек $S(e^{j\omega T})$ при $\omega T = 2\pi f/N$; $\ln[D(f)]$ — комплексный логарифм, мнимая часть которого подлежит разворачиванию одним из методов, описанных в [2, 3]. Согласно второму алгоритму, при $n \neq 0$ имеем [1]

$$C_2(n) = -\frac{1}{Nnj} \sum_{f=0}^{N-1} \frac{D'(f)}{D(f)} \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nf\right). \quad (3)$$

Здесь

$$D'(f) = -j \sum_{n=0}^{N-1} s(n) n \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nf\right) \quad (4)$$

— отсчеты производной непрерывной функции $S(e^{j\omega T})$ по ωT . При $n = 0$

$$C_2(0) = C_1(0) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} \ln|D(f)|. \quad (5)$$

* N выбирается таким, чтобы при переходе к конечному интервалу усечения $s(n)$ либо вообще не происходило, либо им можно было пренебречь.

Отметим, что в (3) функция $B(f) = D'(f)/D(f)$ — это отсчеты производной от $\ln [S(e^{j\omega T})]$ по ωT . Определение вещественной и мнимой частей $B(f)$ через вещественные и мнимые части $D(f)$ и $D'(f)$ приведено, например, в [1].

$C_1(n)$ и $C_2(n)$ для одного и того же сигнала неодинаковы. При рациональной функции $S(z)$ без особых точек и нулей на единичной окружности это объясняется ошибками развертывания мнимой части $\ln [D(f)]$ при вычислении $C_1(n)$, ошибками оценивания наклона линейной компоненты в развернутой фазовой кривой [4] и различным влиянием эффекта наложения на $C_1(n)$ и $C_2(n)$ [1, 2].

Анализ свойств функций $\ln [S(e^{j\omega T})]$ и $S'(e^{j\omega T})/S(e^{j\omega T})$. z -преобразование многих из элементарных колебаний можно представить как дробно-рациональную функцию z вида [1]

$$S_0(z) = Az^{-r} \prod_{i=1}^{N_0} (z - a_i) / \prod_{i=1}^{P_0} (z - b_i), \quad (6)$$

где A — вещественный коэффициент, a_i — нули, b_i — полюсы, N_0 и P_0 — соответственно число нулей и полюсов, r — величина задержки (целое число). Для действительных элементарных колебаний нули и полюсы являются вещественными или сопряженными комплексными числами, а $S(z)$ при $z = \pm 1$ имеет вещественные значения. Пусть аддитивный сигнал образован из двух отражений, имеющих соответственно $A = A_1$ и A_2 , $r = r_1$ и r_2 , причем $|A_1| > |A_2|$, $r_1 < r_2$. Для него z -преобразование равно

$$S(z) = S_{01}(z)(1 + cz^{-\tau}), \quad (7)$$

$S_{01}(z)$ — z -преобразование первого отражения вида (6), $c = A_1/A_2$, $\tau = r_2 - r_1$. Множитель запаздывания $1 + cz^{-\tau}$ определяется относительным значением c и взаимным сдвигом τ . Он имеет τ нулей, равномерно через $\omega T = 2\pi/\tau$ расположенных на окружности радиусом $|c|^{1/\tau}$ в точках

$$z_{k,1} = |c|^{1/\tau} e^{j(2\pi/\tau)k} \text{ при } c < 0, k = 0, 1, 2, \dots, \tau - 1;$$

$$z_{k,2} = |c|^{1/\tau} e^{j(2\pi/\tau)(k+1/2)} \text{ при } c > 0.$$

После логарифмирования (7) с учетом (6) получим

$$\begin{aligned} \ln [S(z)] = & \ln A_1 + (N_0 - P_0 - r_1) \ln z + \sum_{i=1}^{N_0} \ln (1 - z^{-1}a_i) - \\ & - \sum_{i=1}^{P_0} \ln (1 - z^{-1}b_i) + \sum_{k=0}^{\tau-1} \ln (1 - z^{-1}z_k), \end{aligned} \quad (8)$$

где $z_k = z_{k,1}$ при $c < 0$ и $z_k = z_{k,2}$ при $c > 0$. На единичной окружности $\ln z = j\omega T$, т. е. слагаемое $(N_0 - P_0 - r_1) \ln z$ в (8) составляет линейную компоненту мнимой части $\ln [S(z)]$ [4]. Каждое из остальных слагаемых, исключая $\ln A_1$, определяется своим нулем или полюсом. Для физически реализуемой, устойчивой входной последовательности $s(n)$ $|b_i| < 1$, $|a_i| < \infty$.

В общем случае, если $|a| < 1$, при $|z| > |a|$ справедливо разложение [5]:

$$\ln (1 - az^{-1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n z^{-n}}{n}. \quad (9)$$

Если $|a| > 1$, то логарифмическую функцию следует представить как

$$\ln (1 - az^{-1}) = \ln (-a) - \ln z + \ln (1 - a^{-1}z) \quad (10)$$

и последнее слагаемое в (10) разложить в степенной ряд по z , сходящийся при $|z| < |a|$. Функцию $\ln z$ только на единичной окружности при

$|\omega T| < \pi$ можно представить рядом [5]

$$\ln z = \ln(1+z) - \ln(1+z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad (11)$$

$$\text{где } \alpha_n = \begin{cases} (-1)^n/n & \text{при } n \neq 0, \\ 0 & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

Подставляя (9) с учетом (10) и (11) в (8), получим суммарный ряд по степеням z и z^{-1} для $\ln[S(z)]$, сходящийся на единичной окружности при $|\omega T| < \pi$. Обратное z -преобразование этого ряда дает комплексный кепстр, определенный на бесконечном интервале, отсчеты которого в точках $\pm nT$ суть коэффициенты при степенях z^{-n} и z^n . Таким образом, если скомпенсировать линейную компоненту, то комплексный кепстр аддитивных сигналов с рациональным z -преобразованием при $n \neq 0$ будет полностью определяться суммой относительных логарифмических функций вида (9) и (10) для каждого нуля и полюса. Поэтому было бы целесообразно вначале выяснить поведение одного из этих слагаемых в зависимости от расположения нуля или полюса на единичной окружности. Их реальная и мнимая части определяют соответственно кепстр мощности и фазовый кепстр одиночного нуля или полюса.

С другой стороны, для определения комплексного кепстра на бесконечном интервале по второму алгоритму требуется знать функцию $\ln'[S(e^{j\omega T})] = S'(e^{j\omega T})/S(e^{j\omega T})$, которая с учетом (8) для единичной окружности выражается через производную от $\ln[S(z)]$ по z следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln'[S(e^{j\omega T})] &= jz \ln'[S(z)] = j(N_0 - P_0 - r_1) + \\ &+ j \sum_{i=1}^{N_0} \frac{z^{-1}a_i}{1 - z^{-1}a_i} - j \sum_{i=1}^{P_0} \frac{z^{-1}b_i}{1 - z^{-1}b_i} + j \sum_{k=0}^{r-1} \frac{z^{-1}z_k}{1 - z^{-1}z_k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следует отметить, что в (12) от линейной компоненты остается постоянная чисто мнимая величина $j(N_0 - P_0 - r_1)$, которая входит в среднее значение мнимой части (12) и при получении комплексного кепстра (см. (3), (5)) автоматически исключается. В этом, наряду с отсутствием операции развертывания, состоит основное преимущество второго алгоритма.

Отдельные слагаемые в (12) для нуля или полюса можно разложить в ряд вида

$$\frac{z^{-1}a}{1 - z^{-1}a} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n & \text{при } |a| < 1 \text{ и } |z| > |a|, \\ -1 - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n & \text{при } |a| > 1 \text{ и } |z| < |a|, \end{cases} \quad (13)$$

сходящийся на единичной окружности.

После подстановки (13) в (12), замены $z = e^{j\omega T}$, вычисления коэффициентов Фурье функции $\ln'[S(e^{j\omega T})]$ и деления последних на $-jn$ [1] получим такой же комплексный кепстр сигнала $s(n)$ на бесконечном интервале, как и в случае обратного z -преобразования (8), но без кепстра линейной компоненты [4]. Так же, как и в выражении (8), для оценки поведения (12) на единичной окружности в зависимости от расположения нулей и полюсов $S(z)$ следует вначале выяснить характер этой зависимости для типового слагаемого в (12) вида (13).

Полагая в общем случае, что часть нулей или полюсов $S(z)$, включая нули множителя запаздывания, может равномерно с относительным угловым сдвигом $2\pi/h$ располагаться на окружности радиусом $|a|^{1/h}$, где h — целое, для типовых слагаемых в (8) и (12) получим

$$P(\omega T) = \ln(1 - e^{-j\omega T h} a), \quad (14)$$

$$P'(\omega T) = j h e^{-j\omega T h} a / (1 - e^{-j\omega T h} a), \quad (15)$$

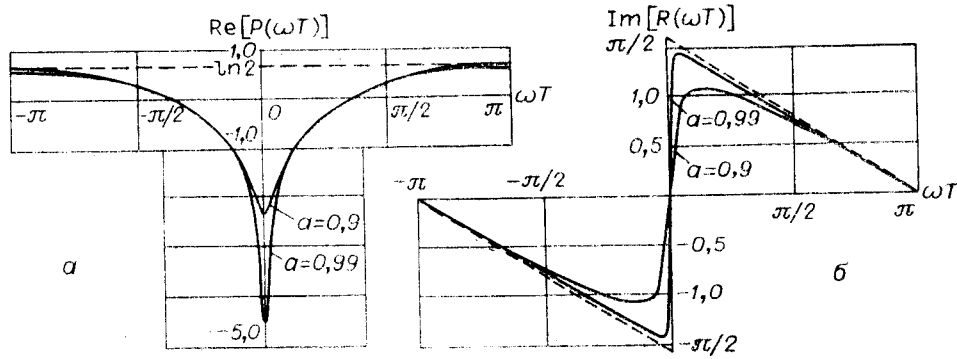


Рис. 1.

где $z_k = a^{1/h} e^{j(2\pi/h)k}$, $k=0, 1, 2, \dots, h-1$, — особые точки типовых слагаемых. Рассмотрим зависимость (14) и (15) от a , полагая вначале a действительным и $a > 0$. При этом

$$\operatorname{Re} [P(\omega T)] = (1/2) \ln [1 + a^2 - 2a \cos(\omega Th)], \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} [P(\omega T)] = \operatorname{arctg} \{ [a \sin(\omega Th)] / [1 - a \cos(\omega Th)] \}, \quad (17)$$

$$\operatorname{Re} [P'(\omega T)] = ah \{ [\sin(\omega Th)] / [1 + a^2 - 2a \cos(\omega Th)] \}, \quad (18)$$

$$\operatorname{Im} [P'(\omega T)] = ah \{ [\cos(\omega Th) - a] / [1 + a^2 - 2a \cos(\omega Th)] \}, \quad (19)$$

где (17) — развернутая мнимая часть (14) на интервале $[-\pi, \pi]$. Функции (16)–(19) при $0 < a < 1$ на интервале $[-\pi, \pi]$ являются периодическими с периодом $2\pi/h$, причем (16) и (19) четные, а (17) и (18) нечетные. Их вид на одном периоде при $h=1$ для $a=0,9$ и $0,99$ показан на рис. 1, а, б; 2, а, б.

При $a \rightarrow 1$ снизу ($a \rightarrow 1-0$) и $\omega T \neq 2\pi l/h$ ($l=0, \pm 1, \dots, \pm(h/2-1), -h/2$, если h — четное число, и $l=0, \pm 1, \dots, \pm(h-1)/2$, если h — нечетное число) получим

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} \{ \operatorname{Re} [P(\omega T)] \} = \ln 2 + \ln [\sin(\omega Th/2)]; \quad (20)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} \{ \operatorname{Im} [P(\omega T)] \} = \begin{cases} \pi/2 - \omega Th/2 + l\pi & \text{при } 0 < \omega Th - 2\pi l < 2\pi, \text{ если } h \text{ — четное число;} \\ \pi/2 - \omega Th/2 + l\pi & \text{при } 0 < \omega Th - 2\pi l < \pi; \\ -\pi/2 - \omega Th/2 + l\pi & \text{при } -\pi \leq \omega Th - 2\pi l < 0, \text{ если } h \text{ — нечетное} \\ & \text{число;} \end{cases} \quad (21)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} \{ \operatorname{Re} [P'(\omega T)] \} = (h/2) \operatorname{ctg}(\omega Th/2); \quad (22)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} \{ \operatorname{Im} [P'(\omega T)] \} = -h/2. \quad (23)$$

С другой стороны, если $\omega T = 2\pi l/h$ и $0 < a < 1$, то

$$\operatorname{Re} [P(\omega T)] = \ln(1-a), \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} [P(\omega T)] = 0, \quad (25)$$

$$\operatorname{Re} [P'(\omega T)] = 0, \quad (26)$$

$$\operatorname{Im} [P'(\omega T)] = ah/(1-a). \quad (27)$$

Из (20)–(25) следует, что при $a \rightarrow 1-0$ в точках $\omega T = 2\pi l/h$ имеем

$$\operatorname{Re} [P(\omega T)] \rightarrow -\infty;$$

$\operatorname{Im} [P(\omega T)] \rightarrow$ разрыв первого рода с величиной скачка π (предел слева $-\pi/2$, справа $+\pi/2$);

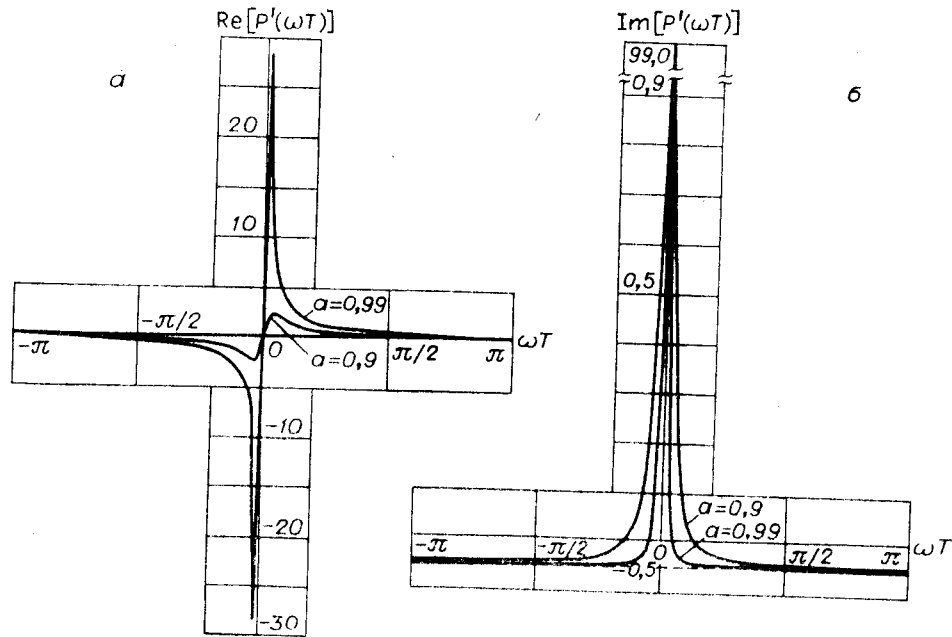


Рис. 2.

$\text{Re}[P'(\omega T)] \rightarrow$ разрыв второго рода (предел слева $-\infty$, справа $+\infty$);
 $\text{Im}[P'(\omega T)] \rightarrow +\infty$.

Далее рассмотрим (16)–(19) при $a > 1$. Вынося в (12), (13) $-ae^{-j\omega Th}$, преобразуем (16)–(19) к виду

$$\text{Re}[P(\omega T)] = \ln|a| + (1/2) \ln[1 + g^2 - 2g \cos(\omega Th)], \quad (28)$$

$$\text{Im}[P(\omega T)] = \pi - \omega Th - \text{arctg}\{[g \sin(\omega Th)]/[1 - g \cos(\omega Th)]\}, \quad (29)$$

$$\text{Re}[P'(\omega T)] = gh \{[\sin(\omega Th)]/[1 + g^2 - 2g \cos(\omega Th)]\}, \quad (30)$$

$$\text{Im}[P'(\omega T)] = gh \{[g \cos(\omega Th) - 1]/[1 + g^2 - 2g \cos(\omega Th)]\}. \quad (31)$$

Здесь $g = 1/a$, а добавление π в (29) следует из однозначного представления

$$\ln(-a) = \ln|a| + j\pi. \quad (32)$$

Это добавление не влияет на комплексный кештр, который, будучи вещественным, зависит только от нечетной части (29)*.

При $a \rightarrow 1$ сверху ($a \rightarrow 1+0$) и $\omega T \neq 2\pi l/h$ выражения (28), (30) переходят соответственно в (20) и (22); (29) отличается от (21) знаком и слагаемым $\pi - \omega Th$, а (31) совпадает с (23). В точках $\omega T = 2\pi l/h$ при $a \rightarrow 1+0$ (28) и (30) стремятся к тому же пределу, что и при $a = 1-0$, (29) имеет разрыв первого рода с величиной скачка π , причем предел слева равен $(\pi - 2\pi l) + \pi/2$, справа $-(\pi - 2\pi l) - \pi/2$, а (31) стремится к $-\infty$.

Интеграл от $G(\omega T) = \{\text{Im}[P'(\omega T)] + h/2\}/\pi$, взятый в пределах одного периода по ωT от $-\pi/h$ до $+\pi/h$, при $a \rightarrow 1 \pm 0$ равен ± 1 . Функция, обладающая свойствами $G(\omega T)$, при $a = 1 \pm 0$ является $\mp \delta$ -функцией, т. е.

$$\lim_{a \rightarrow 1 \pm 0} \{\text{Im}[P'(\omega T)]\} = \mp \pi \delta(\omega T + 2\pi l/h) - h/2. \quad (33)$$

Если $a = |a|e^{j\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, то (16)–(19), не изменяя своего вида, смещаются по ωT на φ/h . При $\varphi \neq \pi$ для получения нечетной относительно $\omega T = 0$ (без учета постоянной добавки) функции развернутого аргумента (14) и (15) необходимо рассматривать в сумме с аналогичны-

* См. также в [3] программу SCEPS, параметр ISNX.

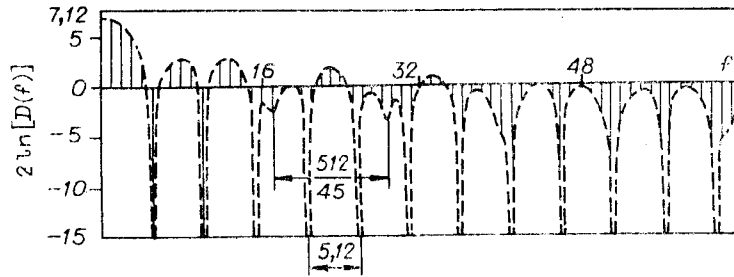


Рис. 3.

ми выражениями, для которых $a = a^* = |a|e^{-j\varphi}$, используя полученные выше результаты. При $\varphi = \pi$ ($a = -|a|$) и $h = 1$ $\lim_{a \rightarrow 1+0} [P(\omega T)] = \lim_{a \rightarrow 1-0} [P(\omega T)]$ для $-\pi < \omega T < \pi$ и $P(\omega T)$ не имеет разрывов.

Выводы и предложения. Проведенный анализ выражений (14), (15) позволяет сделать следующие выводы и предложить способы обработки аддитивных сигналов, имеющих нули z-преобразования на единичной окружности.

1. Нули $S(e^{j\omega T})$ приводят к бесконечным отрицательным выбросам в $\ln |S(e^{j\omega T})|$. Между выбросами функция $\text{Re}[P(\omega T)]$ монотонно изменяется от $-\infty$ до $\ln 2$ в середине. На рис. 3 приведена функция $2 \ln |D(f)|$ для аддитивного сигнала из двух отражений в виде прямоугольных импульсов (рис. 4). Узкие бесконечные отрицательные выбросы пульсаций огибающей отсчетов этой функции соответствуют нулям на единичной окружности и являются помеховыми. Выбросы пульсаций небольшой амплитуды, два из которых хорошо видны (один при $f = 17$, а другой между отсчетами с $f = 29, 30$), обусловлены взаимным сдвигом отражений и являются информационными. Вследствие наличия нулевых отсчетов в $|D(f)|$ при вычислении $\ln |D(f)|$ на ЭВМ возникает переполнение. Чтобы его избежать, отсчеты $|D(f)|$ сравнивают с небольшим числом $\varepsilon > 0$, логарифм которого может быть вычислен. Если $|D(f)| < \varepsilon$, то вместо $\ln |D(f)|$ используется $\ln \varepsilon$ [6]. Для функции $2 \ln |D(f)|$ это означает ограничение снизу отрицательных выбросов помеховых пульсаций на уровне $2 \ln \varepsilon$. Чем больше ε , тем меньше размах помеховых пульсаций и уровень помех в кепстральной области на частотах, кратных основной частоте (частоте) пульсаций. Особенно уменьшается уровень помеховых пиков из-за эффекта паложения.

Величину «ближних» (прилегающих к $n = 0$) помеховых пиков в кепстральной области можно примерно оценить. Из выражения (9) для $P(\omega T)$ следует

$$2 \text{Re}[P(\omega T)] = -2 \sum_{i=1}^{\infty} a^i \frac{\cos(ih\omega T)}{i}. \quad (34)$$

Ряд (34) сходится к удвоенной правой части (16) и в том случае, если $a = \pm 1$, а $2\pi l < h\omega T < 2\pi(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots, h-1$; при $a = 1$ или $(2l+1)\pi < h\omega T < (2l+3)\pi$, $l = 0, 1, 2, \dots, h-2$, $0 \leq h\omega T < \pi$ и $(2h-1)\pi < h\omega T \leq 2h\pi$ при $a = -1$ [5]. Чем меньше ε , тем в более узкой области происходит ограничение выбросов в (34) при $a = \pm 1$ на уровне $2 \ln \varepsilon$. При малых значениях ε обратное ДПФ отсчетов (34) в кепстральной области приводит к пикам, следующим через h отсчетов, с максимальным модульным значением, близким к $1/i$, i — номер пика. Это хорошо подтверждается, например, кепстром мощности для сигнала на рис. 4, который приведен на рис. 5, а. Как показала обработка ряда аддитивных сигналов с нулями z-преобразования на еди-

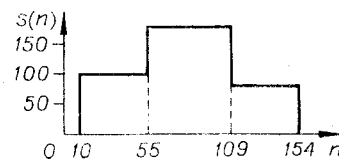


Рис. 4.

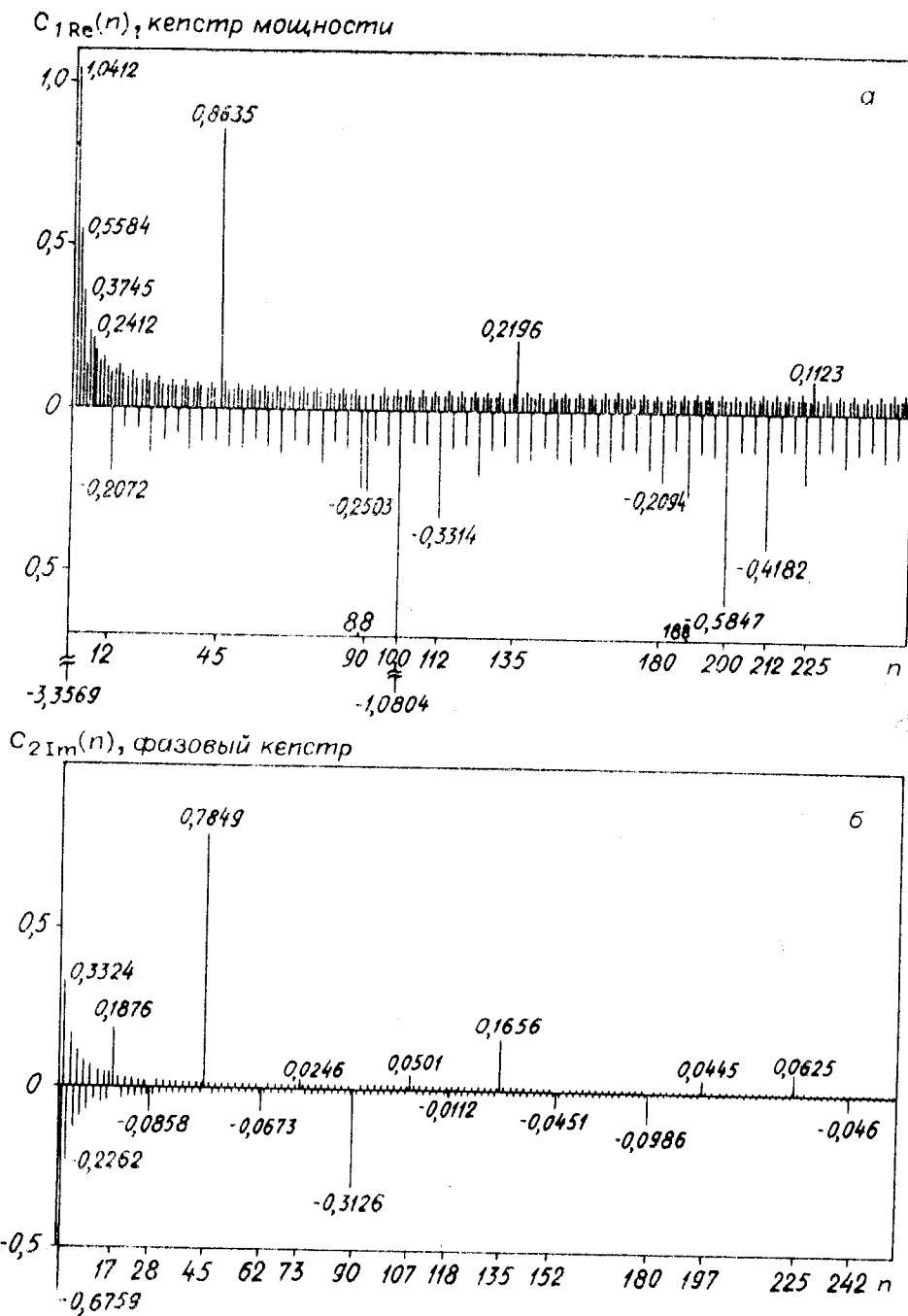


Рис. 5.

ничной окружности, от величины ϵ в сильной степени зависит уровень «дальних» помеховых пиков с большими номерами i , которые участвуют в формировании пиков наложения. Этот уровень уменьшается с увеличением ϵ .

Величину ϵ выбирают так, чтобы информационные выбросы не ограничивались. Поскольку при этом в пределы области ограничения попадает небольшое число искажаемых ограничением отсчетов информационных пульсаций, информационные пики в кепстральной области остаются практически такими же, как и для аддитивных сигналов, с тем же распределением амплитуд отражений, но без нулей в спектральной

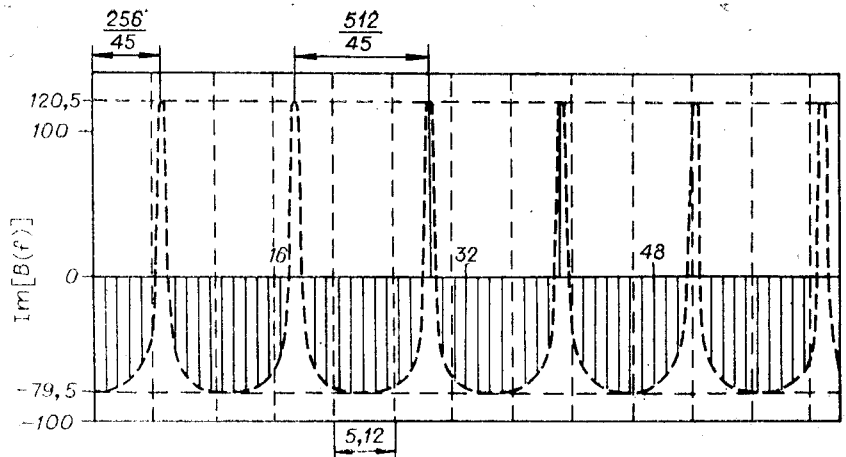


Рис. 6.

функции. Исключение составляет случай, когда множитель запаздывания в (7) сам имеет нули на единичной окружности и избежать ограничения информационных пульсаций невозможно. Однако и в этом случае в кепстре будет ряд пиков на частотах, кратных частоте пульсаций. По этим пикам можно судить о взаимном сдвиге отражений.

Следует отметить, что путем ограничения исключить помеховые пики в кепстре не удастся при любой величине ε . Дополнительное уменьшение уровня помех можно получить, выбирая отсчетные точки $S(e^{j\omega T})$ так, чтобы между ними попали нули.

2. Развертывание $\arg[D(f)]$ при наличии нулей в $S(e^{j\omega T})$ в общем случае невозможно. В нулях $S(e^{j\omega T})$ аргумент не определен, что приводит к случайным скачкам при развертывании.

3. Функция $\ln'|S(e^{j\omega T})|$ при ωT , соответствующих нулям на единичной окружности, имеет разрывы второго рода с бесконечными пределами справа и слева. Между точками разрывов $\text{Re}[P'(\omega T)]$ монотонно изменяется от $+\infty$ (предел справа) до 0 и от 0 до $-\infty$ (предел слева). Исключить бесконечные выбросы в $\text{Re}[B(f)]$ можно двусторонним ограничением этой функции, а также выбором N , T или h (если параметрами элементарного колебания можно управлять) так, чтобы выбросы по возможности оказались между отсчетами. Однако проверка на ЭВМ моделей аддитивных сигналов показала, что из-за более сильного влияния эффекта наложения уровень помех в кепстре мощности в этом случае получается существенно выше, чем при ограничении $2\ln|D(f)|$.

4. Нулям $S(z)$ на единичной окружности соответствуют δ -выбросы в производной аргумента $\arg'[S(e^{j\omega T})]$. Между двумя выбросами $\text{Im}[P'(\omega T)]$ постоянна, т. е. наличие нулей приводит лишь к смещению кривой $\arg'[S(e^{j\omega T})]$ вдоль оси ординат без изменения ее вида между выбросами (рис. 6). Отсюда следует эффективный способ исключения влияния таких нулей на фазовый кепстр. По нулям $|D(f)|$ определяются номера отсчетов функции $D'(f)/D(f)$, соответствующих δ -выбросам, и данные отсчеты замещаются соседними. Такое замещение может вызвать заметные по уровню помехи в фазовом кепстре только в том случае, если нули $S_0(z)$ попадают в область быстрых изменений $\arg'[S(e^{j\omega T})]$, например, когда угловое положение нуля на единичной окружности оказывается близким к таковому для другого нуля или полюса $S(z)$, находящегося внутри или вне единичного круга. Вероятность таких совпадений тем больше, чем больше h и τ . Кроме того, N , T или h выбираются так, чтобы как можно больше нулей $S_0(z)$, расположенных на единичной окружности, попало между отсчетами $S_0(e^{j(2\pi/N)f})$. Для этого необходимо, чтобы отношение N/h не было целым числом, а числа N и h имели возможно меньше общих простых сомножителей, являясь, например, вза-

мно простыми числами. В этом случае помехи в фазовом кепстре могут иметь незначительный уровень (см. рис. 5, б).

Пример. Аддитивный сигнал на рис. 4 с параметрами $\tau = 45$ и $c = 0,8$ сформирован на основе прямоугольного импульса

$$\begin{cases} s(n) = A_1 & \text{при } r_1 \leq n \leq N_1 - 1 + r_1, \\ s(n) = 0 & \text{при } n < r_1 \text{ и } n \geq N_1 + r_1, \end{cases} \quad (35)$$

где $A_1 = 100$, $N_1 = 100$, $r_1 = 10$, и имеет z -преобразование

$$S(z) = A_1 z^{-r_1} \frac{(1 - z^{-N_1})}{1 - z^{-1}} (1 + cz^{-\tau}). \quad (36)$$

z -преобразование (35) соответствует $S_{01}(z)$ в (7). Оно имеет устранимую особую точку (полюс) при $z = 1$ и N_1 нулей, равномерно через $2\pi/N_1$, начиная с $z = 1$, расположенных на единичной окружности. Для нулей $\varphi = 0$ и $h = N_1$. В данном случае $N = 512$, т. е. $N/h = 5,12$, и совпадение нуля $S(e^{j\omega\tau})$ с отсчетом имеет место для каждого 25-го нуля при $f = f_0 = 128, 256, 384$ ($f_{01} = 128$). Множителю запаздывания из (36) в (14), (15) соответствует $a = -c$ ($\varphi = \pi$). Поэтому первый нуль этого множителя смещен относительно $f = 0$ на $N/(2\tau) = 5,69$ и находится между 5-м и 6-м отсчетами $S(e^{j\omega\tau})$, а остальные нули следуют через $N/\tau = 11,38$, что хорошо видно из рис. 3 и 6. Совпадает с отсчетом только 22-й нуль при $f = 256$. С этим же отсчетом совпадает 50-й нуль $S_{01}(z)$.

На рис. 5 приведены графики кепстра мощности (см. рис. 5, а), вычисленного согласно (1) через $2 \operatorname{Re} \{\ln |D(f)|\} = 2 \ln |D(f)|$, и фазового кепстра (см. рис. 5, б), вычисленного согласно (3) через $2 \operatorname{Im} [B(f)]$. $|D(f)|$ ограничена снизу на уровне $\varepsilon = 10^{-7}$ ($2 \ln \varepsilon = -32,236$). Отсчеты $\operatorname{Im} [B(f)]$, совпадающие с δ -выбросами, выявлялись по нулям $|D(f)|$ сравнением с порогом $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рис. 5, а, кроме полезных пиков множителя запаздывания, следующих через $\tau = 45$ с амплитудой, определяемой обратным ДПФ отсчетов ряда (34) при $h = \tau$, имеются также помехи, вызванные элементарным колебанием. Отметим только пики за счет помеховых пульсаций функции $2 \ln |D(f)|$ (см. рис. 3). Причина появления этих пиков такая же, как и для полезных пиков. Они соответствуют «множителю запаздывания» $S_{01}(z)$, если элементарное колебание представить как разность двух ступенчатых «отражений» с $c = -1$ и $\tau = N_1 = 100$. Величина этих пиков, как об этом упоминалось выше, близка к $-1/i$. Так как ряд (34) бесконечный, а $|c| = 1$, то элементарное колебание в кепстре мощности имеет пики наложения для «своего» множителя запаздывания. Это, например, отрицательные пики за счет сдвинутого на N вправо кепстра при $n = 212, 112$ и 12 и наложения при сдвиге на N влево при $n = 88$ и 188 .

Огибающая отсчетов $\operatorname{Im} [B(f)]$ (см. рис. 6) в промежутках между δ -выбросами здесь полностью определяется множителем запаздывания в (36), т. е. функцией (19) при $h = \tau$, $a = -c$, а влияние элементарного колебания согласно (23) сказывается лишь в смещении (19) вниз по оси ординат на $-[(N_1 - 1)/2 + r_1] = -59,5$. Поэтому (в отличие от кепстра мощности на рис. 5, а) в фазовом кепстре на рис. 5, б влияние нулей $S_{01}(z)$, расположенных на единичной окружности, проявляется только в виде знакопеременной помехи, убывающей пропорционально $1/n$, которая является следствием замещения в $\operatorname{Im} [B(f)]$ отсчетов с номерами $f = 128, 256$ предшествующими им отсчетами и с номером $f = 384$ (для сохранения симметрии) — последующим отсчетом. Отсчеты $\operatorname{Im} [B(f)]$ с $f = 127, 385$ равны $-78,731$, а огибающая отсчетов при $f = 128, 384$ принимает значение $-77,051$, т. е. разница составляет всего $-1,68$. В то же время разница между отсчетами с $f = 255, 257$, равными $-52,819$, и огибающей при $f = 256$, равной $120,5$, составляет величину $-173,319$. Отсюда следует, что в основном помеха в фазовом кепстре на рис. 5, б обусловлена замещением отсчета при $f = 256 = N/2$. Нетрудно определить, что она имеет вид $2(173,319/Nn) \cos(\pi n)$.

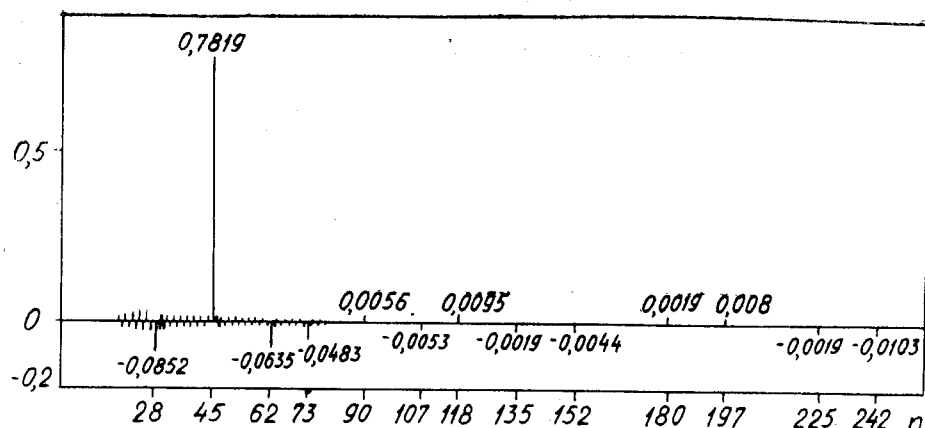


Рис. 7.

Отметим также большее значение пиков наложения для множителя запаздывания на рис. 5, б по сравнению с рис. 5, а. Так, пики при $n = 242; 197; 152; 107; 62$ и 17 на рис. 5, б возникают из-за наложения справа, а с $n = 28, 73, 118$ — из-за наложения слева, тогда как на рис. 5, а они практически не наблюдаются.

Множественность пиков множителя запаздывания в кепстре, приводящую к ошибкам измерения τ , можно исключить, если вначале подать кепстр элементарного колебания «лифтром верхних частот», а затем преобразовать полученный комплексный кепстр в порядке, обратном его получению по первому алгоритму [2]. Подобную обработку можно применить к фазовому кепстру, представив его сначала как односторонний комплексный кепстр путем приравнивания нулю отсчетов с одной стороны, например, слева, от $n = 0$. Результат такой обработки кепстра на рис. 5, б для $0 \leq n \leq N/2$ приведен на рис. 7 (сачота среза лифтра равна 20). Отсчеты при $N/2 + 1 \leq n \leq N - 1$ близки к нулю. Дополнительное снижение уровня помех может дать перемножение фазового кепстра и его обращения. Так, после перемножения функций на рис. 5, б и 7 полезный пик при $n = 45$ равен 0,6138, а помеха по абсолютной величине не превышает 1,2 % его величины. Отметим также, что при обработке аддитивного сигнала с шумом для повышения устойчивости оценки обращения кепстра, выделенного лифтром, следует выполнять лишь в пределах частотного окна, где спектральная функция после потенцирования мало искажена шумом. Это приводит, однако, к расширению полезных пиков в обращенном кепстре, а в некоторых случаях — к сдвигу их временного положения. Для их сжатия можно, подобно тому как это делается при оценке энергетического спектра по коротким записям сигнала [7], применить адаптивную фильтрацию выделенного отрезка (или отрезков) дискретной спектральной функции, продлив его за пределами частотного окна с помощью линейного предсказания на основе одного из алгоритмов оценки коэффициентов авторегрессионной модели, например алгоритма Бурга [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ./Под ред. С. Я. Шаца.— М.: Связь, 1979, с. 416.
2. Чайлдере Д. Дж., Скиннер Д. П., Кемерейт Р. Ч. Кепстр и его применение при обработке данных.— ТИИЭР, 1977, т. 65, № 10.
3. Tribolet J. M. A New Phase Unwrapping Algorithm.— IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1977, vol. ASSP-25, N 2.
4. Зеленков А. В. Оценка тренда аргумента спектральной функции при вычислении комплексного кепстра.— Радиотехника и электроника, 1981, т. 24, № 4.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М.: Наука, 1967, т. 1, с. 486.

6. Hammond J. K., Peardon L. G. The Power Spectrum Applied to Multi-Peaked Wavelets.— J. of Sound and Vibration, 1976, vol. 48, N 4.
7. Ulrych T. J., Smylie D. E., Jensen O. G., Clarke S. K. Predictive Filtering and Smoothing of Short Records by Using Maximum Entropy.— J. of Geophys. Research, 1973, vol. 78, N 23.
8. Andersen N. On the Calculation of Filter Coefficients for Maximum Entropy Spectral Analysis.— Geophysics, 1974, vol. 39, N 1.

*Поступила в редакцию 2 января 1980 г.;
окончательный вариант — 25 мая 1981 г.*

УДК 517.512 : 681.142.323

И. БАЙЛА, Г. А. ОСОСКОВ

(Дубна Московской)

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ БЫСТРОГО СЛЭНТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введение. К числу весьма эффективных методов спектральных представлений, развитие которых диктуется не только физическими задачами, но и проблемами кодирования и сжатия данных, можно отнести аппарат дискретных унитарных преобразований. Наибольшую популярность дискретные унитарные преобразования приобрели в области цифровой обработки и передачи изображений [1—4].

Среди ортогональных преобразований, использующих несинусоидальные векторные базисы, особое место принадлежит слэнт-преобразованию, введенному авторами [5] специально для представления линейных изменений контрастности в двумерных изображениях. Базис слэнт-преобразования выгодно отличается от базисов остальных дискретных ортогональных преобразований тем, что кроме вектора постоянных значений содержит еще вектор линейно убывающих значений — дискретного представления наклонной прямой линии.

В настоящее время существует ряд работ [5—7], в которых даны четкое определение слэнт-преобразования и подробный анализ его приложений в обработке цифровых изображений. Тем не менее быстрые алгоритмы прямого и обратного слэнт-преобразований описываются только для небольшого фиксированного числа компонент обрабатываемых векторов данных ($N=2, 4, 8$), а программные реализации вовсе не приводятся.

Усилия авторов настоящей работы были направлены на применение слэнт-преобразования для сжатия данных (в режиме «on line») в бесфильмовой системе съема и обработки штриховых бинарных изображений со стримерных камер физики высоких энергий [8], в связи с чем возникла необходимость разработать такое математическое обеспечение, которое обладало бы достаточной полнотой (наличие прямого и обратного преобразований) и универсальностью (произвольность размерности). Этому и посвящено предлагаемое сообщение.

Алгоритм быстрого слэнт-преобразования (БСП). В качестве математической модели двумерного цифрового изображения, представленного совокупностью одномерных сигналов, введем N -мерное евклидово векторное пространство E_N . Любой одномерный цифровой сигнал, являющийся N -мерным вещественным вектором X , запишем в виде вектор-столбца. Соответствующую вектор-строку обозначим $X' = [x_1, x_2, \dots, x_N]$.

Для натурального n матрица слэнт-преобразования $S(n)$ (или S_N ,