8. **Байла И., Ососков Г. А.** К вопросу о сжатии данных при бесфильмовом съеме информации со стримерных камер. II. Анализ двух основных типов алгоритмов сжатия.— Дубна: ОИЯИ, 1980. (Препринт, ОИЯИ; Р10-80-237.)
9. **Кривошеев М. И. и др.** Цифровое телевидение.— М.: Связь, 1980.
10. **Байла И. и др.** К вопросу о сжатии данных при бесфильмовом съеме информации со стримерных камер. I. Методические аспекты и общая концепция сжатия.— Дубна: изд. ОИЯИ, 1980. (Препринт, ОИЯИ; № Р10-80-162.)
11. **Ососков Г. А. и др.** Об одном алгоритме сжатия информации при бесфильмовом съеме данных со стримерных камер.— Дубна: ОИЯИ, 1978. (Препринт, ОИЯИ; Р10-11213.)

Поступила в редакцию 24 июля 1980 г.

УДК 621.391.1.037.3

Ю. В. ЗАХАРОВ, Е. А. СИДОРОВ

(Москва)

ПРЕДЕЛЬНАЯ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Приближение сплайнами непрерывных сообщений, представленных дискретными данными, находит все более широкое применение в системах сбора и обработки информации. Обусловлено это простотой выполнения алгоритмов сплайн-аппроксимации как в универсальных, так и в специализированных вычислительных устройствах. Например, в работе [1] приводится пакет программ для приближения функций сплайнами; в [2] рассмотрены возможности построения специализированных сплайн-аппроксиматоров 2-го и 3-го порядков, а также указаны конкретные разработки некоторых ведущих зарубежных фирм, включающие специализированные аппроксиматоры 1-го порядка. Поскольку реальные сообщения часто относят к классу случайных функций, то возникает вопрос о предельной точности сплайн-аппроксимации таких функций и путях ее достижения.

В дальнейшем мы будем пользоваться схемой, показанной на рис. 1, которая позволяет формально описать процедуру сплайн-аппроксимации. На этой схеме изображены линейные фильтры Φ_1 и Φ_2 и дискретизатор $Д_T$, осуществляющий дискретизацию с интервалом T.

Вариант, когда фильтр Φ_1 отсутствует, а фильтр Φ_2 имеет импульсную характеристику, совпадающую с фундаментальным сплайном порядка n [3], соответствует интерполяции случайной функции сплайном порядка n. Ошибки интерполяции случайных функций сплайнами 1-го и 3-го порядков получены в работе [4].

Варьирование характеристиками фильтра Φ_1 при заданном фильтре Φ_2 позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку аппроксимации. В общем виде для произвольного фильтра Φ_2 характеристики оптимального фильтра Φ_1 получены в [5] и [6]. В [6] даются также выражения для минимальной среднеквадратичной ошибки аппроксимации случайной функции сплайном 1-го порядка и для оптимальной передаточной функции фильтра Φ_1. В [7] приведен вариант построения фильтра Φ_1, дающего практически ту же ошибку, что и оптимальный.

В настоящей статье получены формулы для минимальной среднеквадратичной ошибки аппроксимации случайной функции $X(t)$ с норми-

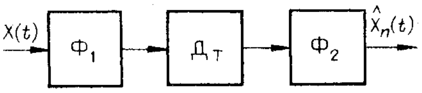

Рис. 1.

рованной спектральной плотностью $R(\omega)$ сплайнами произвольного порядка n.

Импульсная характеристика фильтра Φ_2, позволяющего получить сплайн $\hat{X}_n(t)$ n-го порядка, может совпадать как с фундаментальным сплайном, так и с B-сплайном того же порядка. Оптимальные фильтры Φ_1 в обоих вариантах будут разными, а ошибка аппроксимации — одинаковой. Однако значительно интереснее второй вариант, поскольку B-сплайн n-го порядка представляет собой кусочно-полиномиальную функцию, которая образуется путем умножения на T n-кратной свертки прямоугольной функции с основанием T и высотой $1/T$. Отсюда следует, что фильтр Φ_2 можно реализовать путем последовательного соединения n устройств текущего среднего.

Перейдем к вычислению ошибки. В [5] доказано, что при заданной передаточной функции $F(\omega)$ фильтра Φ_2 среднеквадратичная ошибка будет минимальной, если передаточная функция $G(\omega)$ фильтра Φ_1 равна

$$G(\omega) = T\overset{*}{F}(\omega)\Big/\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(\omega + k\omega_0)|^2, \tag{1}$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота дискретизации. Ошибка при этом определяется выражением

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\frac{|F(\omega)|^2}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |F(\omega + k\omega_0)|^2}\,d\omega. \tag{2}$$

Если импульсная характеристика фильтра Φ_2 — это B-сплайн n-го порядка, то его передаточная функция равна преобразованию Фурье B-сплайна: $F(\omega) = B_n(\omega) = T[\sin(\omega T/2)/(\omega T/2)]^{n+1}$.

С учетом этого соотношения формулы (1) и (2) принимают соответственно вид:

$$G_n(\omega) = \{[(\omega T/2)\sin(\omega T/2)]^{n+1}\alpha_{2n+2}(\omega T/2)\}^{-1}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\left[\left(\frac{\omega T}{2}\right)^{2n+2}\alpha_{2n+2}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^{-1} d\omega, \tag{4}$$

где

$$\alpha_n(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u+\pi k)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{ctg}^{(n-1)}u.$$

Рассмотрим поведение ошибки ε_n при увеличении n. Для этого необходимо найти предел функции

$$L_{2n+1}(\omega) = [(\omega T/2)^{2n+2}\alpha_{2n+2}(\omega T/2)]^{-1}, \tag{5}$$

стоящей под интегралом в выражении (4), при стремлении n к бесконечности. Опуская промежуточные выкладки при нахождении этого предела, приведем лишь окончательный результат

$$\lim_{n\to\infty} L_{2n+1}(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_0/2; \\ T/2, & |\omega| = \omega_0/2; \\ 0, & |\omega| > \omega_0/2. \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что функция $L_{2n+1}(\omega)$ — это преобразование Фурье фундаментального сплайна степени $2n+1$ [3]. Соотношение (6) означает, что при увеличении n ошибка ε_n стремится к ошибке аппроксимации случайной функции $X(t)$ рядом Котельникова и в пределе равна

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0/2}^{\infty} R(\omega)\,d\omega.$$

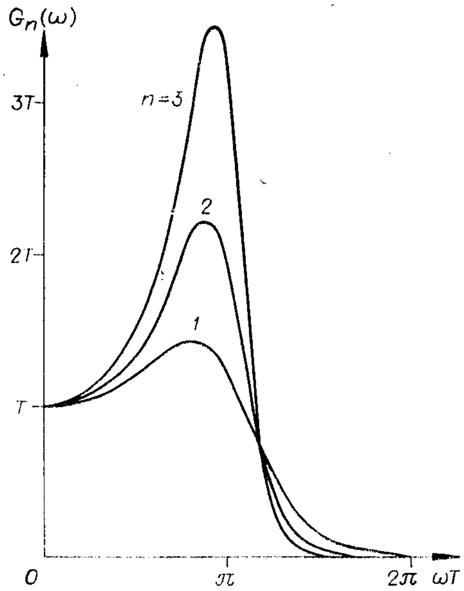

Рис. 2.

Рассмотрим, как ведет себя передаточная функция фильтра Φ_1 при увеличении n. Для линейной ($n=1$), квадратичной ($n=2$) и кубической ($n=3$) сплайн-аппроксимаций передаточные функции имеют вид

$$G_1(\omega)=\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2\frac{3T}{2+\cos\omega T},$$

$$G_2(\omega)=\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^3\frac{60T}{33+26\cos\omega T+\cos 2\omega T},$$

$$G_3(\omega)=\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^4\times\frac{2520T}{1208+1191\cos\omega T+120\cos 2\omega T+\cos 3\omega T}.$$

Эти передаточные функции изображены на рис. 2.

Видно, что подъем $G_n(\omega)$ на частотах вблизи $\omega_0/2$ с увеличением степени n возрастает. Одновременно с этим увеличивается завал на частотах выше $\omega_0/2$. Это объясняется тем, что с увеличением n передаточная функция фильтра Φ_2 сужается и для коррекции искажений, вызванных завалом верхних частот в диапазоне $[0, \omega_0/2]$ восстанавливающим фильтром, необходимо осуществить предварительное усиление на этих частотах фильтром Φ_1. Для того чтобы уменьшить вклад ошибки, возникающей за счет эффекта наложения частот, необходимо подавить спектральные составляющие на частотах выше $\omega_0/2$. Этим объясняется резкий спад передаточной функции фильтра Φ_1 на частотах выше $\omega_0/2$. При дальнейшем возрастании степени n передаточная функция оптимального фильтра Φ_1 асимптотически стремится к функции $B_n^{-1}(\omega)$ в диапазоне частот $[-\omega_0/2, \omega_0/2]$ и к нулю вне его.

Вернемся к формуле для ошибки (4). Несмотря на простую запись, она мало пригодна для расчетов, поскольку входящий в нее интеграл для типичных спектральных плотностей $R(\omega)$ не сводится к табличному. Поэтому необходима более простая расчетная формула для ε_n.

Эту формулу найдем следующим образом. Разложим функцию $L_{2n+1}(\omega)$ в ряд Маклорена:

$$L_{2n+1}(\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}L_{2n+1}^{(\nu)}(0)\,\omega^\nu. \tag{7}$$

Этот ряд подставим в (4), и затем, меняя местами операции суммирования и интегрирования, получим окончательное выражение для ошибки в виде ряда по спектральным моментам:

$$\lambda_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)^\nu R(\omega)\,d\omega. \tag{8}$$

Вычислим коэффициенты $L_{2n+1}^{(\nu)}(0)$. Для этого введем обозначения $z=\omega T/2$ и

$$y_n(z)=z^{2n+2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+\pi k)^{2n+2}}=1+z^{2n+2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z+\pi k}\right)^{2n+2}, \tag{9}$$

где $\sum'$ означает отсутствие слагаемого с индексом $k=0$. Тогда можно записать

$$L_{2n+1}(\omega)=F(y_n(z))=y_n^{-1}(z).$$

Производные по ω от функции $L_{2n+1}(\omega)$ в нуле найдем через производные по z от сложной функции $F(y_n(z))$ в точке $z=0$. Воспользовавшись формулой для ν-й производной от сложной функции [8], имеем

$$L_{2n+1}^{(\nu)}(0)=\left(\frac{T}{2}\right)^{\nu}\sum\frac{\nu!}{i_1!\,i_2!\dots i_l!}\,F_{(y_n(0))}^{(m)}\left(\frac{y_n'(0)}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{y_n''(0)}{2!}\right)^{i_2}\dots\left(\frac{y_n^{(l)}(0)}{l!}\right)^{i_l}, \tag{10}$$

где $m=i_1+i_2+\dots+i_l$, (11)

а суммирование распространяется на все возможные решения $\{i_1, i_2, \dots \dots, i_l\}$ уравнения

$$i_1+2i_2+\dots+li_l=\nu. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что

$$F^{(m)}(y_n(0))=(-1)^m m!. \tag{13}$$

Из (9) видно, что γ — производная функция $y_n(z)$ в точке $z=0$ — может быть представлена в виде

$$y_n^{(\gamma)}(0)=(u_n(0)\,v_n(0))^{(\gamma)}=\sum_{r=0}^{\gamma}C_\gamma^r u_n^{(r)}(0)\,v_n^{(\gamma-r)}(0), \tag{14}$$

где C_γ^r — биномиальный коэффициент; $u_n(z)=z^{2n+2}$; $v_n(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(z+ +\pi k)^{-2n-2}$. Производные в нуле функций $u_n(z)$ и $v_n(z)$ равны:

$$u_n^{(r)}(0)=\begin{cases}(2n+2)!, & r=2n+2;\\ 0, & r\neq 2n+2;\end{cases} \tag{15}$$

$$v_n^{(\gamma-2n-2)}(0)=(-1)^{\gamma}(2n+2)(2n+3)\dots(\gamma-1)\,\pi^{-\gamma}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^{-\gamma}. \tag{16}$$

Для нечетных γ сумма $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^{-\gamma}=0$, а для четных γ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' k^{-\gamma}=2\zeta(\gamma)$, где $\zeta(\gamma)$ — дзета-функция [9]. Поэтому, учитывая (15) и (16), можно записать

$$y_n^{(\gamma)}(0)=\begin{cases}0, \ \gamma \text{ — нечетное или } \gamma<2n+2;\\ 2\,\dfrac{\zeta(\gamma)}{\pi^{\gamma}}\,C_\gamma^{2n+2}(2n+2)\,[(\gamma-1)!] \text{ для других } \gamma.\end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, все сомножители каждого слагаемого суммы (10) получены. Найдем теперь слагаемые, которые образуют эту сумму. Для этого рассмотрим подробно уравнение (12).

Пусть ν — нечетное. Покажем, что справедливо утверждение: для нечетных ν хотя бы один из членов i_η с нечетным индексом η в каждом решении уравнения (12) отличен от нуля. Действительно, если все члены i_η с нечетными индексами η равны нулю, то в левой части уравнения (12) имеем сумму четных чисел, а следовательно, сама левая часть равна четному числу. Это противоречит тому, что ν нечетное. Следовательно, наше утверждение верно. Тогда в каждом слагаемом суммы (10) в силу (17) и приведенного утверждения будет присутствовать сомножитель $(0)^{i_\eta}$, т. е. все слагаемые будут равны нулю. Отсюда следует, что $L_{2n+1}^{(\nu)}(0)=0$ для нечетных ν.

Пусть ν — четное. Решения уравнения (12), включающие члены i_η с нечетными индексами η, а также с индексами $\eta<2n+2$, в силу (17) дают нулевые слагаемые в сумме (10). Поэтому (12) можно переписать в более простом виде:

$$(2n+2)i_{2n+2}+(2n+4)i_{2n+4}+\dots+li_l=\nu, \tag{18}$$

где l — четное. С учетом (13) и (17) для четных ν коэффициенты разложения функции $L_{2n+1}(\omega)$ в ряд Маклорена определяются равенством

$$L_{2n+1}^{(\nu)}(0) = \frac{T^\nu}{2^\nu} \sum \frac{(-1)^m m! \nu! (2n+2)^m}{i_{2\nu+2}! \ldots i_l!} \prod_{\eta=2\nu+2}^{l} \left[\frac{2\zeta(\eta)}{\eta \pi^\eta} C_\eta^{2n+2} \right]^{i_\eta}. \quad (19)$$

Подставляя ряд (7) в (4) и учитывая (8) и (19), а также замену $z = \omega T/2$, получим окончательную формулу для ошибки

$$\varepsilon_n = \sum_{\nu=2n+2}^{\infty} (-1)^{\nu/2} \lambda_\nu T^\nu \sum \frac{(-1)^m m!}{(i_{2\nu+2}! \ldots i_l!) [(2n+1)!]^m} \prod_{\eta=2n+2}^{l} \times$$
$$\times \left[\frac{B_\eta}{(\eta - 2n - 2)! \eta} \right]^{i_\eta}, \quad (20)$$

где B_η — числа Бернулли, связанные с $\zeta(\eta)$ соотношением $\zeta(\eta) = B_\eta (2\pi)^\eta / 2\eta!$, вторая сумма и произведение берутся по всем решениям $\{i_\eta\}$, $\eta = 2n+2, \ldots, l$, уравнения (18), а m находится из (11).

Отметим, что соотношение (20) получено в предположении о существовании всех спектральных моментов λ_ν. Это справедливо, например, для случайных функций с ограниченной или гауссовой спектральной плотностью $R(\omega)$. В случае, когда спектральные моменты существуют до λ_N включительно, верхний предел в первой сумме равенства (20) можно заменить на N. Равенство это теперь будет приближенным. Если ограничиться только первым слагаемым этой суммы, получим следующую приближенную формулу для ошибки:

$$\varepsilon_n \cong (-1)^{n+1} [B_{2n+2}/(2n+2)!] \lambda_{2n+2} T^{2n+2}.$$

Для $n = 1, 2, 3$ соответственно имеем

$$\varepsilon_1 \cong (\lambda_4 T^4)/(6!), \quad \varepsilon_2 \cong -(\lambda_6 T^6)/(6 \cdot 7!), \quad \varepsilon_3 \cong (3\lambda_8 T^8)/(10!). \quad (21)$$

Заключение. Получены формулы, позволяющие для стационарной случайной функции с произвольной спектральной плотностью вычислить ошибку ее наилучшей аппроксимации полиномиальным сплайном произвольного порядка. Такая аппроксимация достигается при наличии в схеме на рис. 1 оптимального предыскажающего фильтра Φ_1. В [7] доказано, что в случае линейной сплайн-аппроксимации такой фильтр может быть реализован на базе интегрирующего аналого-цифрового преобразователя. Можно показать, что этот же фильтр оказывается практически оптимальным и в случае квадратичной сплайн-аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **De Boor C.** Package for Calculating with *B*-Splines.— SIAM J. Numer. Anal., 1977, vol. 14, N 3.
2. **Nielsen G.** Digital Processing of Analogue Signals. P. 3.— Electron. Eng., Gr. Brit., 1979, N 1.
3. **Lee S. L.** Fourier Transforms of *B*-Splines and Fundamental Splines for Cardinal Hermite Interpolations.— Proc. AMS, 1976, vol. 57, N 2.
4. **Caprihan A.** Sampling of Signals and Their Reconstruction.— Int. J. Systems Sci., 1976, vol. 7, N 9.
5. **Немировский А. С., Немировский М. С.** Оптимальная интерполяция случайных процессов рядами Котельникова.— Радиотехника и электроника, 1975, № 1.
6. **Захаров Ю. В., Сидоров Е. А.** Оптимальное предыскажение аналоговых сообщений в системе с импульсно-кодовой модуляцией.— Автометрия, 1979, № 4.
7. **Захаров Ю. В., Сидоров Е. А.** Предыскажающий фильтр для линейной интерполяции.— В кн.: Дальневост. акуст. сб. Владивосток: ДВГУ, 1979.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
9. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган: Перевод с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазина.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 14 апреля 1981 г.