

6. Hammond J. K., Peardon L. G. The Power Spectrum Applied to Multi-Peaked Wavelets.— J. of Sound and Vibration, 1976, vol. 48, N 4.
7. Ulrych T. J., Smylie D. E., Jensen O. G., Clarke S. K. Predictive Filtering and Smoothing of Short Records by Using Maximum Entropy.— J. of Geophys. Research, 1973, vol. 78, N 23.
8. Andersen N. On the Calculation of Filter Coefficients for Maximum Entropy Spectral Analysis.— Geophysics, 1974, vol. 39, N 1.

*Поступила в редакцию 2 января 1980 г.;
окончательный вариант — 25 мая 1981 г.*

УДК 517.512 : 681.142.323

И. БАЙЛА, Г. А. ОСОСКОВ

(Дубна Московской)

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ БЫСТРОГО СЛЭНТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введение. К числу весьма эффективных методов спектральных представлений, развитие которых диктуется не только физическими задачами, но и проблемами кодирования и сжатия данных, можно отнести аппарат дискретных унитарных преобразований. Наибольшую популярность дискретные унитарные преобразования приобрели в области цифровой обработки и передачи изображений [1—4].

Среди ортогональных преобразований, использующих несинусоидальные векторные базисы, особое место принадлежит слэнт-преобразованию, введенному авторами [5] специально для представления линейных изменений контрастности в двумерных изображениях. Базис слэнт-преобразования выгодно отличается от базисов остальных дискретных ортогональных преобразований тем, что кроме вектора постоянных значений содержит еще вектор линейно убывающих значений — дискретного представления наклонной прямой линии.

В настоящее время существует ряд работ [5—7], в которых даны четкое определение слэнт-преобразования и подробный анализ его приложений в обработке цифровых изображений. Тем не менее быстрые алгоритмы прямого и обратного слэнт-преобразований описываются только для небольшого фиксированного числа компонент обрабатываемых векторов данных ($N=2, 4, 8$), а программные реализации вовсе не приводятся.

Усилия авторов настоящей работы были направлены на применение слэнт-преобразования для сжатия данных (в режиме «on line») в бесфильмовой системе съема и обработки штриховых бинарных изображений со стримерных камер физики высоких энергий [8], в связи с чем возникла необходимость разработать такое математическое обеспечение, которое обладало бы достаточной полнотой (наличие прямого и обратного преобразований) и универсальностью (произвольность размерности). Этому и посвящено предлагаемое сообщение.

Алгоритм быстрого слэнт-преобразования (БСП). В качестве математической модели двумерного цифрового изображения, представленного совокупностью одномерных сигналов, введем N -мерное евклидово векторное пространство E_N . Любой одномерный цифровой сигнал, являющийся N -мерным вещественным вектором X , запишем в виде вектор-столбца. Соответствующую вектор-строку обозначим $X' = [x_1, x_2, \dots, x_N]$.

Для натурального n матрица слэнт-преобразования $S(n)$ (или S_N ,

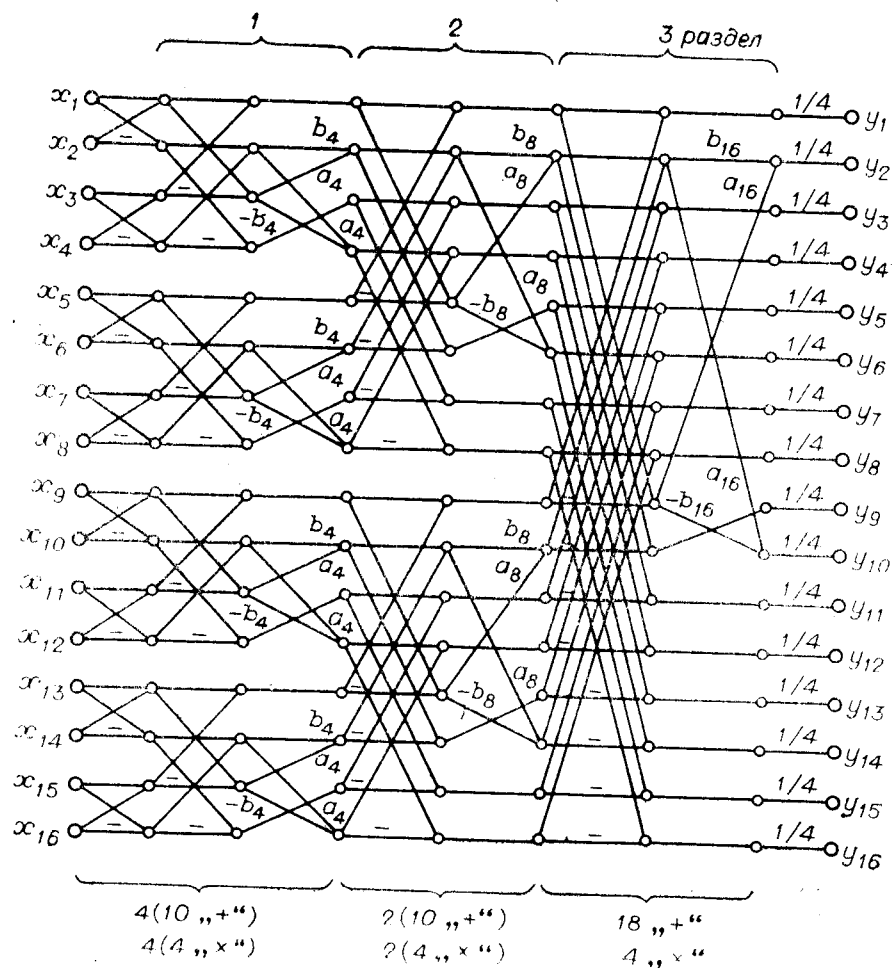


Рис. 1.

где $N = 2^n$) определяется [7] следующей рекуррентной формулой:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_N b_N & 0 & -a_N b_N & 0 \\ 0 & I_{(N/2)-2} & 0 & I_{(N/2)-2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b_N a_N & 0 & b_N a_N & 0 \\ 0 & I_{(N/2)-2} & 0 & -I_{(N/2)-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{N/2} & 0 \\ 0 & S_{N/2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где полагается $a_2 = 1$ и для $N \geq 4$ $b_N = [1 + 4(a_{N/2})^2]^{-1/2}$, $a_N = 2b_N a_{N/2}$ (I_k — единичная $k \times k$ -матрица).

Обе матрицы в определяющем соотношении (1) состоят в основном из нулевых клеток. Учет этой структуры позволяет построить быстрый алгоритм слэнт-преобразования для произвольного N , основанный на замене обычного умножения N -мерного вектора на матрицу ($N \times N$) умножением только на ее ненулевые клетки, что достигается подбором операций с индексами. Такой алгоритм был реализован в виде фортранной программы SLANT и опробован на преобразованиях модельных векторов.

Но, поскольку основным принципом построения быстрых алгоритмов ортогональных преобразований является метод факторизации матриц, определяющих эти преобразования, был построен второй быстрый ал-

горитм FSLANT, использующий факторизованное представление слэнт-преобразования [6]. Несколько модифицируя это представление, можно ввести следующее рекуррентное определение слэнт-матрицы $S_N = S(n)$:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & \\ 0 & b_N & & a_N & 0 & \\ & & \mathbf{I}_{(N/2)-2} & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \\ 0 & a_N & & -b_N & 0 & \\ & & & & & \mathbf{I}_{(N/2)-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & -\mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \sqrt{2^{n-1}} S_{N/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2^{n-1}} S_{N/2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Как это принято при обработке цифровых сигналов, представим алгоритм быстрого слэнт-преобразования для случая $N = 16$ в виде графа (рис. 1). В узлах этого графа располагаются исходные отсчеты цифрового сигнала — компоненты вектора $\mathbf{X}' = [x_1, x_2, \dots, x_{16}]$ и результаты последовательных вычислений. Ребра графа связывают суммируемые величины и результаты суммирования, а числа при ребрах указывают соответствующие коэффициенты умножения величин.

Граф БСП дает возможность определить число требуемых арифметических операций (сложений и умножений, причем умножение на число «-1» не учитывается), а также построить саму программу преобразования при переменном значении N . Так, на рис. 1 общее число суммирований равно 78, умножений (обозначены « \times ») — 28.

Обозначив через A_N общее число суммирований, а через M_N общее число умножений (для $N \geq 2$), получаем следующие формулы для оценки быстродействия.

Алгоритм SLANT:
 $A_N = N(2 + \log_2 N) - 4,$
 $M_N = 4N - 8.$

Алгоритм FSLANT:
 $A_N = N(1 + \log_2 N) - 2,$
 $M_N = 2N - 4.$

Результаты вычислений по этим формулам без учета умножения на коэффициент $1/\sqrt{2^n}$ сведены в табл. 1 и 2.

Сравнение числа операций для алгоритмов SLANT и FSLANT позволяет сделать вывод в пользу последнего, так как некоторый выигрыш в простоте SLANT-программы не может компенсировать заметной разницы в числе операций. Поэтому для массовой эксплуатации можно рекомендовать программу FSLANT.

Алгоритм инверсного БСП. Для инверсного слэнт-преобразования в силу ортогональности вектор-строк справедливо соотношение $S_N^{-1} = S_N'$.

Таким образом, быстрый алгоритм инверсного слэнт-преобразования можно построить на основе рекуррентного определения (2) слэнт-мат-

Таблица 1

| A_N | | | |
|-------|----------------------|-------|--------|
| N | Умножение на матрицу | SLANT | FSLANT |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 12 | 12 | 10 |
| 8 | 56 | 36 | 30 |
| 16 | 240 | 92 | 78 |
| 32 | 992 | 220 | 190 |
| 64 | 4032 | 508 | 446 |

Таблица 2

| M_N | | | |
|-------|----------------------|-------|--------|
| N | Умножение на матрицу | SLANT | FSLANT |
| 2 | 4 | 0 | 0 |
| 4 | 16 | 8 | 4 |
| 8 | 64 | 24 | 12 |
| 16 | 256 | 56 | 28 |
| 32 | 1024 | 120 | 60 |
| 64 | 4096 | 248 | 124 |

рицы S_N . Применяя элементарные матричные операции, для инверсного БСП получаем следующую формулу:

$$S'_N = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \begin{bmatrix} \sqrt{2^{n-1}} S'_{N/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2^{n-1}} S'_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N/2} & I_{N/2} \\ I_{N/2} & -I_{N/2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_N & 0 & a_N & 0 \\ 0 & 0 & I_{(N/2)-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_N & 0 & 0 & -b_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{(N/2)-2} \end{bmatrix}$$

Граф инверсного БСП является зеркальным отображением графа на рис. 1 и поэтому в данной статье не приводится. Тем не менее соответствующая программа инверсного БСП (ISLANT) не может быть получена элементарным обращением порядка операций в программе прямого преобразования, а требует специального построения.

Описание программ FSLANT и ISLANT. Ниже приводится текст программ FSLANT прямого и ISLANT инверсного БСП для векторов произвольной размерности $N = 2^n$, написанных на языке ФОРТРАН-IV.

Отметим, что для компактности в программы FSLANT и ISLANT не были включены операторы печати, и, следовательно, это придется сделать пользователю в главной программе.

Обращение:

CALL FSLANT (X, N, NN, Y),

CALL ISLANT (Y, N, NN, X).

Ресурсы и быстродействие. Общий объем оперативной памяти ЭВМ CDC-6500, необходимый для счета по программе FSLANT, составляет 251₈ слов, по программе ISLANT — 333₈ слов.

Быстродействие программ FSLANT и ISLANT на ЭВМ CDC-6500, вычисленное в тестовых примерах для $N = 64$, составляет 10 мс для FSLANT и 14 мс для ISLANT.

Проведены тестовые вычисления по последовательному применению прямого и обратного слэнт-преобразований модельных векторов, а также сравнение коэффициентов слэнт-матрицы (для $N = 8$) с данными работ [6, 7, 9].

Приложение БСП к сжатию моделей трековых изображений. Одно из возможных применений БСП — сжатие данных при бесфильмовом съеме визуальной информации со стримерных камер. В посвященной этому вопросу работе [10] было предложено удобное представление данных сканирования в виде специальной системы векторов, компоненты которых образованы одинаковыми по порядку точками на отдельных скан-линиях. Типичными элементами таких векторов являются ломаные, состоящие из отрезков прямых линий. Были сгенерированы два типа таких ломаных из одного (X_1) и двух звеньев (X_2), имеющих случайные угловые коэффициенты, распределенные в диапазоне ± 1 . Компоненты векторов, представляющих эти ломаные, принимали значения от 1 до 2^{13} (в соответствии с единицами отсчета).

Процедура сжатия данных (компонентов векторов X_i , $i = 1, 2$) при помощи БСП состояла из следующих преобразований:

$$X_i \rightarrow S_{64} X_i = Y_i = [y_1^i, y_2^i, \dots, y_{64}^i],$$

$$Y_i \rightarrow Y_i^* = [y_{j_1}^i, \dots, 0, 0, \dots, y_{j_2}^i, \dots, y_{j_k}^i, 0, 0],$$

$$Y_i^* \rightarrow S^{-1} Y_i^* = X_i^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_{64}^*],$$

где $k = 2^q$, $q = \overline{2, 5}$.

Таблица 3

| N | ρ_{64} | $\varepsilon_{\infty}^{64}$ | ε_2^{64} |
|-----|-------------|-----------------------------|----------------------|
| 32 | 2 | 0,218 | 0,470 |
| 16 | 4 | 0,518 | 0,722 |
| 8 | 8 | 0,777 | 0,883 |
| 4 | 16 | 0,772 | 1,192 |

Таблица 4

| N | ρ_{64} | $\varepsilon_{\infty}^{64}$ | ε_2^{64} |
|-----|-------------|-----------------------------|----------------------|
| 32 | 2 | 0,400 | 1,949 |
| 16 | 4 | 8,498 | 19,072 |
| 8 | 8 | 22,934 | 34,546 |
| 4 | 16 | 46,846 | 150,610 |

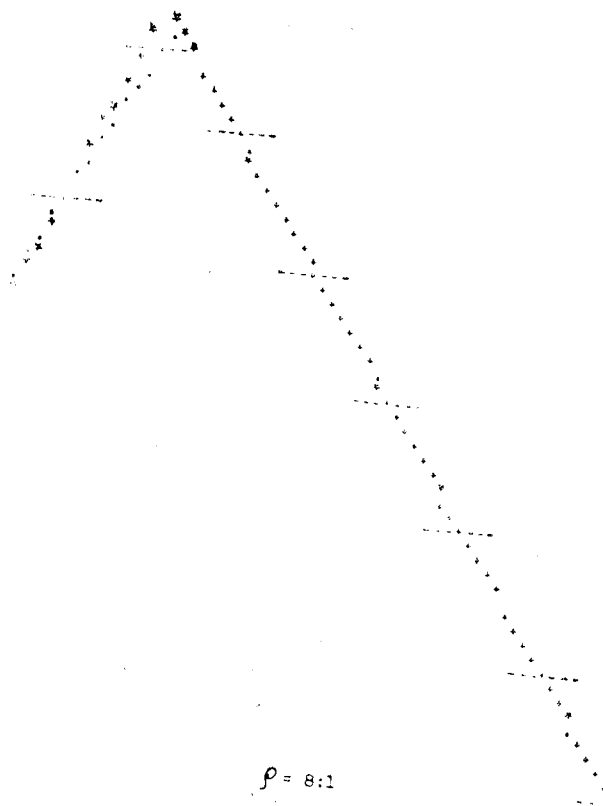
 $\rho = 8:1$

Рис. 2.

Отсечение спектра Y_i проводилось по пороговому критерию, т. е. отбирались компоненты, максимальные по модулю. В качестве критерия неточности восстановления были использованы отклонения векторов X_i и X_i^* в смысле нормы L_{∞}^{64} и L_2^{64} :

$$\varepsilon_{\infty}^{64} = \max_{i=1,64} |x_i - x_i^*|, \quad \varepsilon_2^{64} = \sqrt{\sum_{i=1}^{64} (x_i - x_i^*)^2}.$$

Результаты сжатия модельных векторов приведены в следующих таблицах: X_1 — в табл. 3, X_2 — в табл. 4. При этом через N обозначено число оставшихся компонентов спектра, через ρ_{64} — соответствующий коэффициент сжатия.

Пример результатов сжатия приводится на рис. 2 в виде распечатки X_2 и X_2^* , причем символ «+» соответствует компонентам, в которых оригинал и реконструкция совпадают; в противном случае печатаются два символа: «*» — для оригинала и «.» — для реконструкции. Для подтверждения оптимальности БСП на рис. 2 символом «-» даны результаты реконструкции данных сжатия с помощью преобразования Уолша — Адамара [7].

Таким образом, с помощью БСП можно достичь коэффициента сжатия 8, оставаясь в пределах разрешающей способности устройства сканирования (равной 32 отсчетным единицам [11]).

Заключение. Разработанные программы FSLANT и ISLANT, реализующие быстрые алгоритмы прямого и обратного слэнт-преобразований, представляют собой комплекс математического обеспечения, который можно непосредственно использовать в обработке цифровых сигналов в качестве базы для «on line» реализации прямого и инверсного БСП.

Кроме того, наличие этих программ позволяет реализовать идею адаптивного сжатия, заключающуюся в установлении обратной связи (через ISLANT) между оригиналом и реконструкцией и в выборе опти-

```

SUBROUTINE FSLANT (X,N,NN,Y)
DIMENSION X(NN),Y(NN)
N2=NN/2 $ N4=NN/4
A=1.
DO 10 J=1,N4
I=4×J-3
I1=I+1
I2=I+2
I3=I+3
Y(I)=X(I1)+X(I1)
Y(I1)=X(I)-X(I1)
Y(I2)=X(I2)+X(I3)
10 Y(I3)=X(I2)-X(I3)
DO 20 K=2,N
B=1./SQRT(1.+4.×A××2)
A=A×B×2.
J1=2××K $ J2=J1-1
J3=J1/2 $ J4=J3-1
M=NN/J1
DO 20 J=1,M
I=J×J1-J2
I1=I+1
I3=I+J3
I4=I3+1
DO 40 IJ=1,J3
L=I-1+IJ
LL=L+J3
Z1=Y(L)
Z2=Y(LL)
X(L)=Z1+Z2
40 X(LL)=Z1-Z2
Y(I)=X(I)
Y(I1)=B×X(I1)+A×X(I3)
IF(J1.LT.8) GO TO 60
DO 50 L=2,J4
IL=I+L
50 Y(IL)=X(IL)
60 CONTINUE
Y(I3)=X(I4)
Y(I4)=A×X(I1)-B×X(I3)
IF(J1.LT.8) GO TO 20
DO 70 L=2,J4
IL=I+L+J3
70 Y(IL)=X(IL)
20 CONTINUE
S=1./SQRT(FLOAT(NN))
DO 90 I=1,NN
90 Y(I)-Y(I)×S
RETURN
END

SUBROUTINE ISLANT (Y,N,NN,X)
DIMENSION Y((NN),X(NN))
DIMENSION A(20),B(20)
S=1./SQRT(FLOAT(NN))
A(1)=1. $ B(1)=1.
DO 10 I=2,N
I1=I-1
B(I)=1./SQRT(1.+4.×A(I1)××2)
10 A(I)=2.×A(I1)×B(I)
NN2=NN/2 $ N1=N-1
DO 20 MM=1,N1
M=MM-1 $ MK=2××M
ML=NN/MK $ N2=ML/2
NK=N-M
A1=A(NK) $ B1=B(NK)
N3=N2+1 $ N4=N3+1
N5=N4+1
DO 30 MP=1,MK
MR=(MP-1)×ML
Y2=Y(2+MR)
Y4=Y(N4+MR)
X(1+MR)=Y(1+MR)
X(2+MR)=B1×Y2+A1×Y4
X(N3+MR)=A1×Y2-B1×Y4
X(N4+MR)=Y(N3+MR)
IF(N2.EQ.2) GO TO 40
DO 50 I=3,N2
50 X(I+MR)=Y(I+MR)
DO 60 I=N5,ML
60 X(I+MR)=Y(I+MR)
40 CONTINUE
40 CONTINUE
30 CONTINUE
DO 70 I=1,NN
70 Y(I)=X(I)
DO 80 MP=1,MK
MR=(MP-1)×ML
DO 90 I=1,N2
90 X(I+MR)=Y(I+MR)+Y(I+N2+MR)
DO 100 I=N3,ML
100 X(I+MR)=Y(I-N2+MR)-Y(I+MR)
80 CONTINUE
DO 110 I=1,NN
110 Y(I)=X(I)
20 CONTINUE
DO 120 MP=1,NN2
MR=2×(MP-1)
X(1+MR)=Y(1+MR)+Y(2+MR)
X(2+MR)=Y(1+MR)-Y(2+MR)
120 CONTINUE
DO 130 I=1,NN
130 X(I)=S×X(I)
RETURN
END

```

мальной отсечки спектра по некоторому критерию неточности восстановления. Разработка такого аппарата становится все более актуальной задачей в связи с постоянным ростом потока экспериментальных данных и быстрым развитием средств микроэлектроники, позволяющих аппаратную реализацию быстрых преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
2. Pratt W. K. Digital Image Processing. A Wiley-Interscience Publication.— New York — Chichester — Brisbane — Toronto: John Wiley and Sons, 1978.
3. Huang T. S. Picture Processing and Digital Filtering.— In: Topics in Applied Physics, Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1975, vol. 6.
4. Сороко Л. М., Стриж Т. А. Спектральные преобразования на цифровых вычислительных машинах.— Дубна: ОИЯИ, 1970. (Препринт, ОИЯИ; P10-6702).
5. Enomoto H., Shibata K. Orthogonal Transform Coding System for Television Signals.— IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, 1971, vol. EMC-13, p. 11—17.
6. Pratt W. K., Wen-Hsiung Chen, Welch L. R. Slant Transform Image Coding.— IEEE Trans. on Comm., 1974, vol. COM-22, N 8.
7. Ahmed N., Rao K. B. Orthogonal Transform for Digital Signal Processing.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1975.

8. Байла И., Ососков Г. А. К вопросу о сжатии данных при бесфильмовом съеме информации со стримерных камер. II. Анализ двух основных типов алгоритмов сжатия.— Дубна: ОИЯИ, 1980. (Препринт, ОИЯИ; P10-80-237.)
9. Кривошеев М. И. и др. Цифровое телевидение.— М.: Связь, 1980.
10. Байла И. и др. К вопросу о сжатии данных при бесфильмовом съеме информации со стримерных камер. I. Методические аспекты и общая концепция сжатия.— Дубна: изд. ОИЯИ, 1980. (Препринт, ОИЯИ; № P10-80-162.)
11. Ососков Г. А. и др. Об одном алгоритме сжатия информации при бесфильмовом съеме данных со стримерных камер.— Дубна: ОИЯИ, 1978. (Препринт, ОИЯИ; P10-11213.)

Поступила в редакцию 24 июля 1980 г.

УДК 621.391.1.037.3

Ю. В. ЗАХАРОВ, Е. А. СИДОРОВ

(Москва)

ПРЕДЕЛЬНАЯ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Приближение сплайнами непрерывных сообщений, представленных дискретными данными, находит все более широкое применение в системах сбора и обработки информации. Обусловлено это простотой выполнения алгоритмов сплайн-аппроксимации как в универсальных, так и в специализированных вычислительных устройствах. Например, в работе [1] приводится пакет программ для приближения функций сплайнами; в [2] рассмотрены возможности построения специализированных сплайн-аппроксиматоров 2-го и 3-го порядков, а также указаны конкретные разработки некоторых ведущих зарубежных фирм, включающие специализированные аппроксиматоры 1-го порядка. Поскольку реальные сообщения часто относят к классу случайных функций, то возникает вопрос о предельной точности сплайн-аппроксимации таких функций и путях ее достижения.

В дальнейшем мы будем пользоваться схемой, показанной на рис. 1, которая позволяет формально описать процедуру сплайн-аппроксимации. На этой схеме изображены линейные фильтры Φ_1 и Φ_2 и дискретизатор D_T , осуществляющий дискретизацию с интервалом T .

Вариант, когда фильтр Φ_1 отсутствует, а фильтр Φ_2 имеет импульсную характеристику, совпадающую с фундаментальным сплайном порядка n [3], соответствует интерполяции случайной функции сплайном порядка n . Ошибки интерполяции случайных функций сплайнами 1-го и 3-го порядков получены в работе [4].

Варьирование характеристиками фильтра Φ_1 при заданном фильтре Φ_2 позволяет уменьшить среднеквадратичную ошибку аппроксимации. В общем виде для произвольного фильтра Φ_2 характеристики оптимального фильтра Φ_1 получены в [5] и [6]. В [6] даются также выражения для минимальной среднеквадратичной ошибки аппроксимации случайной функции сплайном 1-го порядка и для оптимальной передаточной функции фильтра Φ_1 . В [7] приведен вариант построения фильтра Φ_1 , дающего практически ту же ошибку, что и оптимальный.

В настоящей статье получены формулы для минимальной среднеквадратичной ошибки аппроксимации случайной функции $X(t)$ с норми-

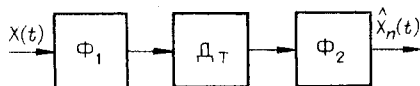


Рис. 1.