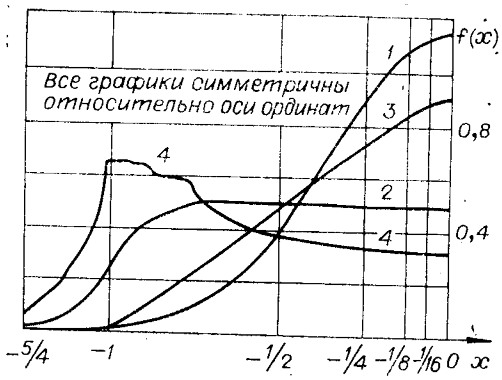

Как показало цифровое моделирование, примерно на 4—5-м отсчете закон распределения ошибок квантования стабилизируется. При цифровом моделировании использовались стационарные случайные процессы со следующими одномерными законами распределения их мгновенных значений:

1) нормальный (усеченный на уровне $\pm 3\sigma_x$), см. (1);

2) равномерной плотности на интервале [—1, 1]:

$$g_i = \begin{cases} 1/2048, & \text{если } |i| \leqslant 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024; \end{cases} \tag{4}$$

3) треугольной формы:

$$g_i = \begin{cases} (1/1024)\,(1 - |i|/1024), & \text{если } |i| \leqslant 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024; \end{cases} \tag{5}$$

4) арксинусной формы:

$$g_i = \begin{cases} (1/1024)\left(1/\left[\pi \sqrt{1 - (i^2/1024^2)}\right]\right), & \text{если } |i| \leqslant 1023; \\ g_{1023}, & \text{если } |i| = 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024. \end{cases} \tag{6}$$

Обратим внимание на то, что во избежание деления на 0 при вычислении g_{1024} по первой части (6) его значение принимается равным g_{1023}.

В табл. 2 приведены СКО квантования различных отсчетов для разных законов распределения.

На рисунке даны полученные в результате цифрового моделирования графики установившейся плотности распределения скорректированных отсчетов f_4 входного сигнала, распределенных в интервале [—5/4, 5/4], для различных одномерных законов распределения входного сигнала (*1* — нормальный закон, *2* — равномерный, *3* — треугольный, *4* — арксинусный). Из рисунка видно, что все законы распределения, как и следовало ожидать, деформированы в большей или меньшей степени.

Содержимое последней графы табл. 2 — выражение СКО квантования через σ_x исходного сигнала — может быть использовано в формуле полной погрешности вычисления корреляционной функции по ускоренному алгоритму [2]:

$$\sigma^2_{\text{ош}} = (2/N)\,(k_{\text{О3}}\sigma_x)^2 \sigma_y^2\,[1 - \beta_y(T)], \tag{7}$$

где $k_{\text{О3}}$ — коэффициент из последней графы табл. 2, учитывающий одномерный закон распределения отсчетов входного сигнала $x(t)$; σ_x^2, σ_y^2 — дисперсии отсчетов входных сигналов $x(t)$ и $y(t)$; $\beta_y(T)$ — значение нормированной автокорреляционной функции сигнала $y(t)$ при τ, равном шагу квантования по времени.

Таким образом, среднеквадратическая ошибка квантования почти не зависит от закона распределения входного случайного сигнала и составляет около 1/5÷1/6 от среднеквадратического значения входного сигнала. Эта величина может быть использована в качестве коэффициента в формуле (7) для учета влияния типа одномерного закона распределения на погрешность ускоренного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Анишин Н. С. и др.** Об одном алгоритме и устройстве для вычисления корреляционной функции.— Автометрия, 1976, № 2.
2. **Анишин Н. С., Тивков А. М.** Ускоренный алгоритм вычисления корреляционных функций и исследование его погрешности.— Автометрия, 1978, № 3.
3. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.

Поступило в редакцию 10 июля 1979 г.

УДК 621.317 : 519.21

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ

В [1] при решении задачи Винера с дополнительным ограничением на степень устойчивости было получено интегральное уравнение

$$\int_0^\infty \omega(\sigma)\, R_1(\mu - \sigma)\, d\sigma + R_2(\mu) - \lambda e^{\eta\mu} w(\mu) = 0, \tag{1}$$

η — положительное число, $\mu > 0$.

Ограничение на степень устойчивости приводит к появлению в интегральном уравнении Винера — Хопфа добавочного члена $\lambda e^{\eta\mu} w(\mu)$, что не позволяет решить его, используя существующие способы [2]. Ниже приводится метод решения интегрального уравнения Винера — Хопфа вида (1).

Положим

$$R_1(\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_i e^{\alpha_i \tau} & \text{при } \tau < 0, \\ b_0 \delta(\tau) + \sum\limits_{j=1}^{n_2} b_j e^{-\beta_j \tau} + \sum\limits_{l=1}^{n_3} c_l e^{-\gamma_l \tau} & \text{при } \tau \geqslant 0, \end{cases}$$

$$R_2(\tau) = \sum_{l=1}^{n_3} d_l e^{-\gamma_l \tau} + \sum_{k=1}^{n_4} e_k e^{-\nu_k \tau} \text{ при } \tau \geqslant 0,$$

$$\operatorname{Re} \alpha_i > 0, \ \operatorname{Re} \beta_j > 0, \ \operatorname{Re} \gamma_l > 0, \ \operatorname{Re} \nu_k > 0.$$

На интервале существования равенства (1) преобразуем его по Фурье. В результате получим [3, 4]

$$\lambda W(s-\eta) = S_1(s) W(s) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_i}{s-\alpha_i} W(\alpha_i) + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{d_l}{s+\gamma_l} + \sum_{k=1}^{n_4} \frac{e_k}{s+\nu_k}, \tag{2}$$

где

$$W(s) = \int_0^\infty \omega(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad S_1(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_i}{s-\alpha_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{b_j}{s+\beta_j} + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{c_l}{s+\gamma_l}.$$

Будем искать решение разностного уравнения (2), регулярное в бесконечно удаленной точке, полюсы которого расположены только в левой полуплоскости комплексного переменного s. С этой целью заметим, что так как вычеты функции

$$S_1(s) W(s) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_i}{s-\alpha_i} W(\alpha_i)$$

в точках $s=\alpha_i$ $(i=1, \ldots, n_1)$ равны нулю, то в этих точках правая часть уравнения (2) полюсов не имеет. Следовательно, полюсы правой части уравнения (2) могут находиться лишь в точках $-\beta_j$, $-\gamma_l$, $-\nu_k$. Поскольку эти же точки являются полюсами и для левой части уравнения (2), т. е. для функции $W(s-\eta)$, то функция $W(s)$ и тем самым правая часть уравнения (2) имеют полюсы $-\beta_j-\eta$, $-\gamma_l-\eta$, $-\nu_k-\eta$, следовательно, этими же полюсами обладает и функция $W(s-\eta)$. Продолжая подобные рассуждения, по методу полной индукции получим, что возможные полюсы функции $W(s)$ расположены в точках

$$-\beta_j - m\eta, \ -\gamma_l - m\eta, -\nu_k - m\eta \ (j=1, \ldots, n_2; \ l=1, \ldots, n_3; \ k=1, \ldots, n_4; \ m=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Очевидно, что у функции $W(s)$ нет простых полюсов, отличных от точек (3).

Обозначим через A_{jm}, B_{lm}, C_{km} вычеты функции $W(s)$ соответственно в точках $-\beta_j - m\eta$, $-\gamma_l - m\eta$, $-\nu_k - m\eta$:

$$A_{jm} = \text{Выч.}\,(W(s), -\beta_j - m\eta); \quad B_{lm} = \text{Выч.}\,(W(s), -\gamma_l - m\eta); \quad C_{km} = \text{Выч.}\,(W(s), -\nu_k - m\eta). \tag{4}$$

Тогда в силу изложенного выше решение уравнения (2) может быть записано в виде

$$W(s) = \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{jm}}{s+\beta_j+m\eta} + \sum_{l=1}^{n_3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{lm}}{s+\gamma_l+m\eta} + \sum_{k=1}^{n_4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{s+\nu_k+m\eta}. \tag{5}$$

Для отыскания неизвестных постоянных A_{jm}, B_{lm}, C_{km} подставим (5) в уравнение (2) и определим вычеты левой и правой частей получившегося равенства в точках $-\beta_j$, $-\gamma_l$, $-\nu_k$, $-\beta_j - m\eta$, $-\gamma_l - m\eta$, $-\nu_k - m\eta$ $(m=1, 2, \ldots)$. Замечая, что

$$\text{Выч.}\,(W(s-\eta), \mu) = \text{Выч.}\,(W(s), \mu-\eta),$$

имеем

$$\begin{gathered} \lambda \,\text{Выч.}\,(W(s), -\beta_j - \eta) = b_j W(-\beta_j), \\ \lambda \,\text{Выч.}\,(W(s), -\gamma_l - \eta) = c_l W(-\gamma_l) + d_l, \\ \lambda \,\text{Выч.}\,(W(s), -\nu_k - \eta) = e_k, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\lambda \,\text{Выч.}\,(W(s), -\beta_j - (m+1)\eta) = S_1(-\beta_j - m\eta)\,\text{Выч.}\,(W(s), -\beta_j - m\eta),$$

$$\lambda\ \text{Выч.}(W(s),\ -\gamma_l-(m+1)\eta)=S_1(-\gamma_l-m\eta)\,\text{Выч.}(W(s),\ -\gamma_l-m\eta), \tag{7}$$
$$\lambda\ \text{Выч.}(W(s),\ -\nu_k-(m+1)\eta)=S_1(-\nu_k-m\eta)\,\text{Выч.}(W(s),\ -\nu_k-m\eta),$$
$$m=1,\ 2,\ \ldots$$

Учитывая обозначение (4), из соотношений (6) и (7) находим

$$A_{j1}=\lambda^{-1}b_jW(-\beta_j),\quad A_{j\,m+1}=\lambda^{-m-1}b_jW(-\beta_j)\prod_{p=1}^{m}S_1(-\beta_j-p\eta),$$

$$B_{l1}=\lambda^{-1}(c_lW(-\gamma_l)+d_l),\quad B_{l\,m+1}=\lambda^{-m-1}(c_lW(-\gamma_l)+d_l)\prod_{p=1}^{m}S_1(-\gamma_l-p\eta),$$

$$C_{k1}=\lambda^{-1}e_k,\quad C_{k\,m+1}=\lambda^{-m-1}e_k\prod_{p=1}^{m}S_1(-\nu_k-p\eta),\quad m=1,\ 2,\ \ldots.$$

Тогда решение (5) уравнения (2) может быть записано в виде

$$W(s)=\sum_{j=1}^{n_2}b_jW(-\beta_j)\,f_j(s)+\sum_{l=1}^{n_3}(c_lW(-\gamma_l)+d_l)\,g_l(s)+\sum_{h=1}^{n_4}e_kh_k(s), \tag{8}$$

где

$$f_j(s)=\frac{\lambda^{-1}}{s+\beta_j+\eta}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-m-1}}{s+(m+1)\eta+\beta_j}\prod_{p=1}^{m}S_1(-\beta_j-p\eta);$$

$$g_l(s)=\frac{\lambda^{-1}}{s+\gamma_l+\eta}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-m-1}}{s+(m+1)\eta+\gamma_l}\prod_{p=1}^{m}S_1(-\gamma_l-p\eta);$$

$$h_k(s)=\frac{\lambda^{-1}}{s+\nu_k+\eta}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-m-1}}{s+(m+1)\eta+\nu_k}\prod_{p=1}^{m}S_1(-\nu_k-p\eta). \tag{9}$$

В приложении показано, что при λ, принадлежащем области

$$|b_0|<|\lambda|, \tag{10}$$

функции $f_j(s)$, $g_l(s)$, $h_k(s)$ аналитичны на всей комплексной плоскости, за исключением точек $-\beta_j-m\eta$, $-\gamma_l-m\eta$, $-\nu_k-m\eta$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$. Тем самым устанавливается, что решение (8) аналитично на всей комплексной плоскости, за исключением точек (3), в которых оно имеет полюсы 1-го порядка.

Для полного определения решения (8) необходимо найти числа $W(-\beta_j)$ и $W(-\gamma_l)$. Они могут быть определены из системы линейных алгебраических уравнений

$$W(-\beta_p)-\sum_{j=1}^{n_2}b_jf_j(-\beta_p)\,W(-\beta_j)-\sum_{l=1}^{n_3}c_lg_l(-\beta_p)\,W(-\gamma_l)=$$
$$=\sum_{l=1}^{n_3}d_lg_l(-\beta_p)+\sum_{k=1}^{n_4}e_kh_k(-\beta_p),\ p=1,\ \ldots,\ n_2; \tag{11}$$
$$W(-\gamma_q)-\sum_{j=1}^{n_2}b_jf_j(-\gamma_q)\,W(-\beta_j)-\sum_{l=1}^{n_3}c_lg_l(-\gamma_q)\,W(-\gamma_l)=$$
$$=\sum_{l=1}^{n_3}d_lg_l(-\gamma_q)+\sum_{k=1}^{n_4}e_kh_k(-\beta_p),\ q=1,\ \ldots,\ n_3.$$

Определитель $\Delta(\lambda^{-1})$ этой системы в области (9) является аналитической функцией переменного λ^{-1}, причем $\Delta(0)=1$. Поэтому система (10) разрешима почти всюду в области (9).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что при λ, удовлетворяющем условию (9), функции $f_j(s)$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости, за исключением точек $-\beta_j-m\eta$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$. Для этого сначала оценим величины $\prod_{p=1}^{m}S_1(-\beta_j-p\eta)$.

Выберем число r из условия $|b_0|<r<r|\lambda|$ и положим $\varepsilon=r-|b_0|>0$. Так как $\lim_{m\to\infty}S_1(-\beta_j-m\eta)=b_0$, то существует такое число N_j, что $|S_1(-\beta_j-m\eta)-b_0|<\varepsilon$ при $m>N_j$.

Отсюда получим

$$|S_1(-\beta_j - m\eta)| \leqslant |S_1(-\beta_j - m\eta) - b_0| + |b_0| < r. \tag{П1}$$

Зная число N_j, положим

$$A_j = \max_{1 \leqslant n \leqslant N_j} \left(r^{-n} \prod_{p=1}^{n} | S_1(-\beta_j - p\eta) | \right). \tag{П2}$$

Из выражений (П1) и (П2) видно, что справедливы оценки

$$\prod_{p=1}^{m} | S_1(-\beta_j - p\eta) | \leqslant A_j r^m,\ m = 1, 2, \ldots, N_j, N_{j+1} \ldots . \tag{П3}$$

Выберем теперь произвольно малое число $\delta > 0$ и обозначим через Q_{mj} δ-окрестность точки $(-\beta_j - m\eta) : Q_{mj} = \{s : |s + m\eta + \beta_j| < \delta\}$. Пусть $R_j(\delta)$ есть комплексная плоскость с удаленными областями Q_{1j}, Q_{2j}. Тогда на $R_j(\delta)$

$$|s + \beta_j + m\eta| \geqslant \delta \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{П4}$$

Учитывая неравенства (П3) и (П4), на $R_j(\delta)$ имеем

$$| f_j(s) | \leqslant \frac{1}{|\lambda| \delta} \left(1 + A_j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|\lambda|} \right)^m \right). \tag{П5}$$

Неравенство (П5) показывает, что в области $R_j(\delta)$ ряд (9), определяющий функцию $f_j(s)$, сходится равномерно. Поэтому по теореме Вейерштрасса функции $f_j(s)$ аналитичны в $R_j(\delta)$. Но так как $\delta > 0$ — произвольно малое число, то из полученного утверждения следует, что функции $f_j(s)$ аналитичны на всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов $-\beta_j - m\eta$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Совершенно аналогично доказывается, что функции $g_l(s)$ и $h_k(s)$ аналитичны на всей комплексной плоскости, кроме точек $-\gamma_l - m\eta$ и $\nu_k - m\eta$ $(m = 1, 2, \ldots)$. В результате получаем, что решение $W(s)$, определенное выражением (8),— аналитическая функция на всей комплексной плоскости, за исключением точек (3), которые являются простыми полюсами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цирлин А. М.** Учет ограничений на расположение корней характеристического уравнения при расчете систем на минимум среднеквадратичной ошибки.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1963, № 1.
2. **Цейтлин Я. М.** Проектирование оптимальных линейных систем.— Л.: Машиностроение, 1973.
3. **Зотов М. Г.** Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом.— Автометрия, 1972, № 1.
4. **Зотов М. Г.** Об одном способе определения неизвестных параметров при решении интегральных уравнений операционным методом.— Автометрия, 1975, № 4.

Поступило в редакцию 17 апреля 1981 г.

УДК 681.3.01

Ю. Г. МОРОЗОВ

(Ленинград)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ХОЛЛОВСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ АВТОМАТИЗАЦИИ

Обработку данных холловских измерений в полупроводниковых материалах можно разделить на два этапа. На первом этапе путем несложных расчетов получают зависимость концентрации носителей заряда от температуры $n(T)$ или чаще $\ln n$ $(1000/T)$, на втором — по характеру этой зависимости определяют основные параметры, характеризующие структуру запрещенной зоны полупроводника.

Второй этап часто выполняют графически, что, с одной стороны, не всегда обеспечивает необходимую точность, а с другой — неприемлемо в условиях автоматизации. В работе [1] для обработки данных холловских измерений был применен метод наименьших квадратов с использованием в качестве теоретического описания