УДК 62-503.32

Н. С. АНИШИН, Ю. Г. КОЖЕВНИКОВ, В. Л. КРИВЕНКО,
Г. Г. ХАЧИЯН

(Краснодар)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОШИБОК КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ В УСКОРЕННОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

С целью сокращения требующихся вычислительных ресурсов в работе [1] предложен, а в [2] исследован ускоренный (и одновременно упрощенный) алгоритм вычисления корреляционных функций.

Его сущность состоит в округлении отсчетов одного из входных сигналов до одного из уровней (обычно ближайшего), числовое значение которых представляется двоичным числом, имеющим в своем составе только одну «1» (например, 0,1; 0,01 и т. п.). Второй отличительной особенностью ускоренного алгоритма является учет ошибки такого округления путем подсуммирования ее к следующему отсчету этого же сигнала. Это уменьшает погрешность алгоритма, вызываемую округлением.

В работе [2] выведена общая формула погрешности ускоренного алгоритма вычисления корреляционных функций, требующая знания закона распределения ошибок округления отсчетов до одного из уровней $\pm(1/2)^q$.

Ниже излагаются методика и результаты расчета функции распределения (графики плотности распределения) ошибок квантования для различных одномерных законов распределения сигналов $x(t)$.

Число уровней квантования (в каждую сторону от 0) выбрано равным 7 (от $(1/2)^0$ до $(1/2)^6$, т. е. $q_{\max}$ положено равным 6). На такой выбор влияет следующее техническое соображение (в случае технической реализации алгоритма): с целью более короткого изображения двоичного числа $(0,1)^q$ требуются (включая знак) 4 двоичных разряда (при $q_{\max}=6$). Дальнейшее увеличение $q_{\max}$ вызовет возрастание требующегося числа разрядов без существенного снижения ошибки квантования. Перекодировка, т. е. запоминание q, а не самого числа $(0,1)^q$, проводится для более компактного представления (запоминания) отсчетов при вычислении очередных точек корреляционной функции. В табл. 1 приведены эти перекодировки.

Поскольку процесс образования ошибки квантования в рассматриваемом алгоритме итеративный и существенно нелинейный, простое аналитическое выражение плотности распределения ошибки квантования практически невозможно.

Методика исследования. При исследовании наряду с вероятностными методами включены методы цифрового моделирования. С помощью ЭВМ вычислялись отсчеты функций распределения ошибки на первом, втором, третьем, четвертом и пятом шагах (отсчетах) вычисления корреляционной функции. Обычно к пятому отсчету итеративный процесс сходился.

Заметим, что итеративность возникает из-за того, что ошибка квантования текущего отсчета передается в последующий отсчет и, естественно, деформирует его исходный закон распределения.

Для цифрового моделирования одномерная плотность распределения $p(x)$ отсчетов исходного сигнала, приведенного к интервалу $[-1, 1]$, представлялась 2049 равностоящими отсчетами с номерами i от -1024 до 1024, т. е.

$$g_i = \begin{cases} p\,(i/1024), & \text{если } |i| \leqslant 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024. \end{cases} \tag{1}$$

Затем вычислялась плотность распределения ошибки квантования первого отсчета входного сигнала

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{если } 256 \leqslant |i|; \\ g_{i-1024} + g_{i+512} + g_{i+1024} \left(= S_i^{(6)}\right), & \text{если } 128 \leqslant |i| < 256; \\ S_i^{(6)} + g_{i-512} + g_{i+256} \left(= S_i^{(5)}\right), & \text{если } 64 \leqslant |i| < 128; \\ S_i^{(5)} + g_{i-256} + g_{i+128} \left(= S_i^{(4)}\right), & \text{если } 32 \leqslant |i| < 64; \\ S_i^{(4)} + g_{i-128} + g_{i+64} \left(= S_i^{(3)}\right), & \text{если } 16 \leqslant |i| < 32; \\ S_i^{(3)} + g_{i-64} + g_{i+32} \left(= S_i^{(2)}\right), & \text{если } 8 \leqslant |i| < 16; \\ S_i^{(2)} + g_{i-32} + g_{i+16} + g_{i-16} + g_i, & \text{если } |i| < 8, \end{cases} \tag{2}$$

где i — номер отсчета функции s_i.

Поскольку ошибка квантования суммируется со вторым отсчетом сигнала, то плотность распределения $f_n^{(2)}$ второго скорректированного отсчета сигнала находится

Таблица 1

n	∞	6	5	4	3	2	1	0
$(1/2)^n$	0,000000	0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1,0
4-разрядный код	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
$-(1/2)^n$	—0,000000	—0,000001	—0,00001	—0,0001	—0,001	—0,01	—0,1	—1,0
4-разрядный код	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

путем цифровой свертки функций g_i и s_i [3]:

$$f_n^{(2)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{n+1279} s_{m-255}g_{n-m+255} & \text{при } -1279 \leqslant n < -769; \\ \sum\limits_{m=0}^{510} s_{m-255}g_{n-m+255} & \text{при } -769 < n < 0; \\ f_{-n}^{(2)} & \text{при } 1279 > n > 0, \end{cases} \tag{3}$$

n — номер отсчета функции $f_n^{(2)}$.

В результате свертки плотность распределения имеет 2559 отсчетов, что соответствует изменению непрерывного аргумента от —5/4 до 5/4.

Квантование в соответствии с алгоритмом второго скорректированного отсчета выполняется со случайной ошибкой. Плотность распределения этой ошибки можно получить по формуле (2), заменив в ней g_i на $f_n^{(2)}$ при n, равном i и изменяющемся от —1279 до +1279:

$$r_n^{(2)} = \begin{cases} 0 & , \text{ если } 256 \leqslant |n|; \\ f_{n-1024}^{(2)} + f_{n+512}^{(2)} + f_{n+1024}^{(2)} \left(= F_n^{(2)}\right), & \text{если } 128 \leqslant |n| < 256; \\ F_n^{(2)} + f_{n-512}^{(2)} + f_{n+256}^{(2)} \left(= G_n^{(2)}\right), & \text{если } 64 \leqslant |n| < 128; \\ G_n^{(2)} + f_{n-256}^{(2)} + f_{n+128}^{(2)} \left(= H_n^{(2)}\right), & \text{если } 32 \leqslant |n| < 64; \\ H_n^{(2)} + f_{n-128}^{(2)} + f_{n+64}^{(2)} \left(= I_n^{(2)}\right), & \text{если } 16 \leqslant |n| < 32; \\ I_n^{(2)} + f_{n-64}^{(2)} + f_{n+32}^{(2)} \left(= K_n^{(2)}\right), & \text{если } 8 \leqslant |n| < 16; \\ K_n^{(2)} + f_{n-32}^{(2)} + f_{n+16}^{(2)} + f_{n-16} + f_n^{(2)}, & \text{если } |n| < 8. \end{cases} \tag{2'}$$

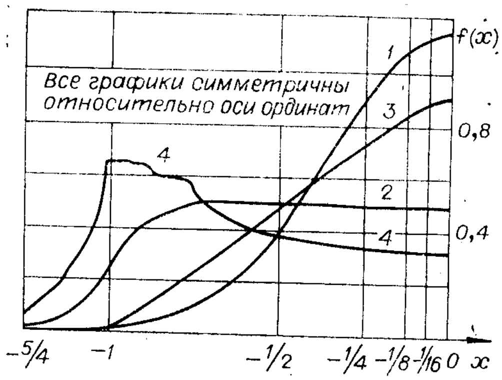
В соответствии с алгоритмом происходит сложение ошибки квантования второго скорректированного отсчета с третьим исходным отсчетом, их сумма будет иметь плотность распределения $f_n^{(3)}$, определяемую по формуле

$$f_n^{(3)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{n+1279} r_{m-255}^{(2)}g_{n-m+255} & \text{при } -1279 \leqslant n < -769; \\ \sum\limits_{m=0}^{510} r_{m-255}\, g_{n-m+255} & \text{при } -769 \leqslant n \leqslant 0; \\ f_{-n}^{(3)} & \text{при } 1279 \geqslant n > 0 \end{cases} \tag{3'}$$

и т. д. Таким образом, подставляя значения $f_n^{(j)}$ в формулу (2'), имеем величину $r_n^{(j)}$, которая будучи подставленной в (3') дает результат $f_n^{(j+1)}$, т. е. процесс идет итеративно.

Таблица 2

Тип закона	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	СКО
Нормальный	0,065402	0,066575	0,066617	0,066619	0,066619	0,200
Равномерный	0,109080	0,109108	0,109107	0,109108	0,109107	0,211
Треугольный	0,084629	0,084819	0,084820	0,084820	0,084820	0,208
Арксинусный	0,108023	0,117086	0,117252	0,117291	0,117292	0,166



Как показало цифровое моделирование, примерно на 4—5-м отсчете закон распределения ошибок квантования стабилизируется. При цифровом моделировании использовались стационарные случайные процессы со следующими одномерными законами распределения их мгновенных значений:

1) нормальный (усеченный на уровне $\pm 3\sigma_x$), см. (1);

2) равномерной плотности на интервале [—1, 1]:

$$g_i = \begin{cases} 1/2048, & \text{если } |i| \leqslant 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024; \end{cases} \tag{4}$$

3) треугольной формы:

$$g_i = \begin{cases} (1/1024)\,(1 - |i|/1024), & \text{если } |i| \leqslant 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024; \end{cases} \tag{5}$$

4) арксинусной формы:

$$g_i = \begin{cases} (1/1024)\left(1/\left[\pi\sqrt{1-(i^2/1024^2)}\right]\right), & \text{если } |i| \leqslant 1023; \\ g_{1023}, & \text{если } |i| = 1024; \\ 0, & \text{если } |i| > 1024. \end{cases} \tag{6}$$

Обратим внимание на то, что во избежание деления на 0 при вычислении g_{1024} по первой части (6) его значение принимается равным g_{1023}.

В табл. 2 приведены СКО квантования различных отсчетов для разных законов распределения.

На рисунке даны полученные в результате цифрового моделирования графики установившейся плотности распределения скорректированных отсчетов f_4 входного сигнала, распределенных в интервале [—5/4, 5/4], для различных одномерных законов распределения входного сигнала (*1* — нормальный закон, *2* — равномерный, *3* — треугольный, *4* — арксинусный). Из рисунка видно, что все законы распределения, как и следовало ожидать, деформированы в большей или меньшей степени.

Содержимое последней графы табл. 2 — выражение СКО квантования через σ_x исходного сигнала — может быть использовано в формуле полной погрешности вычисления корреляционной функции по ускоренному алгоритму [2]:

$$\sigma^2_{\text{ош}} = (2/N)\left(k_{\text{O3}}\sigma_x\right)^2 \sigma_y^2 \left[1 - \beta_y(T)\right], \tag{7}$$

где k_{O3} — коэффициент из последней графы табл. 2, учитывающий одномерный закон распределения отсчетов входного сигнала $x(t)$; σ_x^2, σ_y^2 — дисперсии отсчетов входных сигналов $x(t)$ и $y(t)$; $\beta_y(T)$ — значение нормированной автокорреляционной функции сигнала $y(t)$ при τ, равном шагу квантования по времени.

Таким образом, среднеквадратическая ошибка квантования почти не зависит от закона распределения входного случайного сигнала и составляет около $1/5 \div 1/6$ от среднеквадратического значения входного сигнала. Эта величина может быть использована в качестве коэффициента в формуле (7) для учета влияния типа одномерного закона распределения на погрешность ускоренного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Анишин Н. С. и др.** Об одном алгоритме и устройстве для вычисления корреляционной функции.— Автометрия, 1976, № 2.
2. **Анишин Н. С., Тивков А. М.** Ускоренный алгоритм вычисления корреляционных функций и исследование его погрешности.— Автометрия, 1978, № 3.
3. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.

Поступило в редакцию 10 июля 1979 г.

УДК 621.317 : 519.21

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ

В [1] при решении задачи Винера с дополнительным ограничением на степень устойчивости было получено интегральное уравнение

$$\int_0^\infty \omega(\sigma)\, R_1(\mu - \sigma)\, d\sigma + R_2(\mu) - \lambda e^{\eta\mu} w(\mu) = 0, \tag{1}$$