

5. Мазный Г. Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе «Дубна». — М.: Наука, 1978.
6. Липидевская З. А. Комплекс процедур по линейной алгебре. — Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1980. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 259).
7. Белоносов С. М. Интегральные уравнения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в случае тел вращения. — В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1974, вып. 12.
8. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Слайды в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.
9. Hastings C., Hayward J. Approximations for Digital Computers. — Princeton, 1955.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ФМ, 1956.
11. Ильин В. П., Катешов В. А. Автоматизация описания двумерных краевых задач. — Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1979. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 173).
12. Власов А. Г., Шахматова И. П. Поле линзы с нарушением осевой симметрии. — ЖТФ, 1962, т. XXXII, вып. 6.

Поступила в редакцию 21 октября 1981 г.

УДК 519.688

А. В. ГАВРИЛИН, В. П. ИЛЬИН

(Новосибирск)

### ПАКЕТ ПРОГРАММ ЭДИП ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. Введение. Настоящая работа содержит описание численных методов и пакета прикладных программ (ППП) ЭДИП для решения двумерных задач электродинамики в постановке, сводящейся к решению задачи о свободных волнах и колебаниях.

Известно, что свободные колебания в электродинамической системе с однородным заполнением описываются однородными уравнениями Максвелла, которые в случае гармонической зависимости полей от времени вида  $e^{-i\omega t}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega \epsilon \mathbf{E} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega \mu \mathbf{H} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — амплитуды напряженности электрического и магнитного полей,  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\omega$  — круговая частота изменения поля.

На поверхности электродинамической системы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют заданным граничным условиям.

Рассмотрим далее решение уравнения

$$Lu \equiv -x_1^v \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{x_1^v} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \lambda u \text{ в } \Omega \quad (2)$$

относительно некоторой неизвестной функции  $u$  и числа  $\lambda = -\omega^2 \epsilon \mu$ , где  $\Omega \subset E_2$  — двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Сведение системы уравнений (1) к уравнению (2) возможно в тех частных случаях, когда исследуемая электродинамическая система является регулярным волноводом (при этом  $v = 0$ ,  $\Omega$  — поперечное сечение волновода) или аксиально-симметричным резонатором ( $v = 1$ ,  $\Omega$  — часть меридиональной плоскости, ограниченная контуром образующей резонатора и, быть может, осью симметрии). Граничные условия для тех или иных типов колебаний в предположении идеальной проводимости стенок рассматриваемой системы имеют вид

$$u = 0 \text{ либо } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (3)$$

$\partial/\partial n$  — производная по внешней нормали. На оси симметрии в любом случае выполняются оба условия из (3).

Компоненты электрического и магнитного полей выражаются через решение  $u$  задачи (2), (3) и его производные.

Вопросам численного решения рассматриваемого класса задач посвящены работы многих авторов. Так, подробный обзор зарубежных работ можно найти в [1], где описание численных методов решения поставленной задачи сопровождается их краткой характеристикой, обсуждаются вопросы программной реализации, проводится сравнительная характеристика методов. Следует отметить также работу [2], в которой приведено описание программной реализации метода конечных элементов, используемого для расчета характеристик аксиально-симметричных резонаторов. Метод конечных элементов положен и в основу программ, рассмотренных в [3, 4]. Применение в этих программах неравномерной треугольной сетки дает возможность адекватно описывать сложную геометрию резонаторов, имеется возможность вычисления высших мод колебаний. Некоторые варианты численной реализации метода конечных разностей приводятся в [5—9]. Следует, однако, заметить, что использование в указанных работах квадратной сетки не позволяет в полном объеме реализовать возможности метода конечных разностей.

В настоящей работе применяется метод конечных разностей, причем в случае необходимости осуществляется учет поведения решения в окрестности особых точек, расчет задачи на последовательности сеток с последующей экстраполяцией, задание неравномерной прямоугольной сетки и т. д. (см. п. 2).

Рассматриваемый здесь пакет прикладных программ ЭДИП по структуре отличается от известных программ того же назначения [2—9] своей системной организацией. Описание структуры пакета дается в п. 3.

В п. 4 приведены эксплуатационные характеристики ППП ЭДИП, а также результаты расчетов аксиально-симметричного резонатора.

**2. Краткое описание алгоритмов.** Для построения конечно-разностных уравнений опишем вокруг области  $\Omega$  минимальный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. В этом прямоугольнике построим сетку  $\Omega_h$ , покрывающую область и образованную пересечением координатных линий ( $x_1 = x_{1i}$ ,  $x_2 = x_{2j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ), параллельных осям. Обозначим  $h_i = x_{1i} - x_{1i-1}$ ,  $h_j = x_{2j} - x_{2j-1}$ .

Рассмотрим пятиточечные конечно-разностные аппроксимации. Пусть  $x^0, x^1, \dots, x^4$  — точка шаблона, а  $U(x)$  — произвольная сеточная функция на  $\Omega_h \cup \Gamma_h$ , тогда конечно-разностный оператор  $L_h$  определяется в виде

$$L_{h,x} U(x^0) = p_0 U(x^0) - \sum_{k=1}^4 p_k U(x^k), \quad (4)$$

где коэффициенты зависят от шагов сетки, а для околограничных узлов и узлов, лежащих в окрестности особых точек, — еще и от краевых условий и вида особенности. Вид коэффициентов для пятиточечной аппроксимации уравнения (2) и краевых условий (3) приведен в [10]. Конечно-разностную аппроксимацию (2) в окрестности особых точек можно найти в [11].

Отметим, что использование схем, учитывающих поведение решения дифференциальной задачи, позволяет получать численное решение с точностью  $O(h^{2\alpha} |\ln h| + h^2)$ , в то время как обычные схемы в этом случае имеют точность  $O(h^\alpha |\ln h| + h^2)$ , где  $\alpha = \min_Q \{\alpha(Q)\}$ , а  $\pi/\alpha(Q)$  — величина входящего угла, соответствующего особой точке  $Q$ .

В результате дискретизации исходной задачи (2), (3) приходим к задаче на собственные значения вида

$$L_h U = \lambda_h U, \quad (5)$$

где  $U$  — сеточная функция,  $\lambda_h$  — собственное число,  $L_h$  — оператор из (4).

Вместо (5), однако, разумно рассматривать обобщенную задачу на собственные значения

$$A\varphi = \mu B\varphi \quad (6)$$

с симметричной положительно полуопределенной матрицей  $A = BL_h$  и диагональной матрицей  $B$  с элементами  $b_{hh} = 0,25 x_1^{-v} (h_i + h_{i+1}) (h_j + h_{j+1})$ .

Для нахождения минимального собственного числа и соответствующего собственного вектора воспользуемся степенным методом [12] и модифицированным методом обратных итераций [13].

Степенной метод реализуется следующим образом. Организуется итерационный процесс

$$A\varphi^{n+1} = B\varphi^n / (B\varphi^n, \varphi^n) \quad (7)$$

с начальным приближением собственного вектора  $\varphi^0$ . На каждом шаге этого процесса линейная система алгебраических уравнений решается методом последовательной верхней релаксации с автоматическим выбором оптимального параметра релаксации [12]. Приближенные значения  $\mu_n$  вычисляются по формуле

$$\mu_n = 1 / (B\varphi^n, \varphi^n). \quad (8)$$

Критерием окончания итерационного процесса (7), (8) является выполнение условия

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| < \epsilon. \quad (9)$$

Модифицированный метод обратных итераций запишем в таком виде. При заданных начальных значениях  $\mu_n$  и  $\varphi_0^n$  методом последовательной верхней релаксации вычисляется  $k$  последовательных приближений  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) системы  $(A - \mu_n B)\varphi = 0$ . После этого определяется  $\mu_{n+1} = (A\varphi_k^n, \varphi_k^n) / (B\varphi_k^n, \varphi_k^n)$ ,  $\varphi_0^{n+1} = \varphi_k^n$  и процесс продолжается до выполнения условия (9).

Для вычисления  $p$  первых собственных чисел и соответствующих собственных векторов задачи (6) используется метод итераций в подпространстве. Формулы, реализующие этот метод, можно найти в [14].

При наличии нулевого собственного числа (случай, когда для исходной дифференциальной задачи на всей границе  $\Gamma$  заданы однородные условия Неймана) описанные алгоритмы модифицируются введением процесса ортогонализации итерационных векторов к вектору, соответствующему этому числу.

Конечно-разностная задача (5) может быть решена с помощью метода последовательности сеток, суть которого состоит в том, что решение (5) ищется на последовательности сгущающихся сеток. При этом в качестве начального приближения решения на густой сетке берется решение задачи на более редкой сетке. Практические расчеты показывают, что применение только одной вспомогательной сетки сокращает время решения задачи в 1,5—4 раза. Информация о решении на последних двух сетках используется для повышения точности приближенного определения  $\lambda_h$  и  $U$  методом экстраполяции по Ричардсону [15].

При расчете электродинамических систем немаловажным является вопрос о точности вычисления компонентов электромагнитного поля, а также интегральных характеристик, таких как добротность, мощность потерь в металле, характеристическое сопротивление и т. п. Поэтому все используемые формулы для вычисления тех или иных характеристик имеют второй порядок точности, что согласуется с точностью применяемых для решения разностных схем. Общий вид указанных формул приведен в [16].

**3. Структура пакета.** Численные алгоритмы для решения задач электродинамики, излагаемые выше, реализованы в виде программных модулей на языках ФОРТРАН, АЛГОЛ-ГДР и автокоде МАДЛЕН в рамках мониторинной системы «Дубна» для ЭВМ БЭСМ-6. Немаловажным

здесь является тот фактор, что средства мониторной системы предоставляют пользователю достаточно удобный аппарат редактирования и сегментации программных модулей в динамическом и статическом режимах, а также возможность организации хранения архивов данных и библиотек программ в текстовом виде и на языке загрузки. Именно это и определило то, что пакет имеет оверлейную структуру динамической загрузки в оперативную память отдельных сегментов: модуля обработки входной информации, модуля обработки геометрии области, итерационных модулей, модуля обработки результатов расчета, сервисных и служебных модулей. Кроме того, использование автокода МАДЛЕН дает возможность на основе анализа входной информации производить явное динамическое распределение оперативной памяти для основных счетных массивов, что освобождает пользователя от необходимости самому задавать длины массивов.

С целью обеспечить получение надежных и достоверных результатов на всех этапах работы программы организованы контроль счета и правильности задания исходной информации, своевременный останов и печать диагностики при обнаружении тех или иных ошибок.

Дадим краткое описание модулей пакета ЭДИП в том порядке, в каком выполняется их загрузка в оперативную память ЭВМ.

Модуль обработки входной информации может быть охарактеризован наличием транслятора с входного проблемно-ориентированного языка АЛАДИН [16]. Такой язык позволяет формулировать задачу в терминах, специфичных для данной проблемной области, уменьшает объем вводимой информации за счет широкого использования принципа умолчания и т. п. Параметры управления выводом информации позволяют производить избирательную печать необходимых расчетных величин и массивов, а также выводить на графопостроитель те или иные характеристики электромагнитного поля. Транслятор с языка АЛАДИН преобразует символьное представление данных в информационные массивы, используемые алгоритмическими модулями.

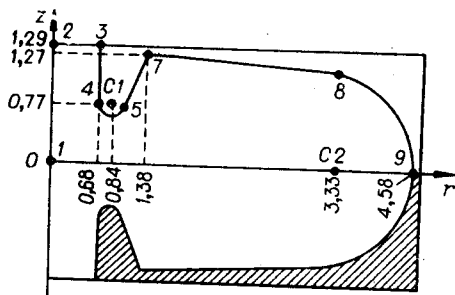
Алгоритм работы модуля обработки геометрии области в целом состоит из организации цикла по всем узлам сетки с выполнением следующих основных операций: проверка на принадлежность узла области  $\Omega$ , определение геометрических параметров шаблона сетки, учет краевых условий в околограничных узлах, вычисление разностных коэффициентов, формирование массивов коэффициентов для околограничных и особых узлов и, наконец, кодировка массива решения в зависимости от типа узла [10]. Отметим, что в рассматриваемом модуле особое внимание уделено методике выделения особенности решения в окрестности особых точек границы.

Назначение итерационных модулей — решение линейных алгебраических уравнений, организация «внешних» итераций для нахождения собственных значений и соответствующих собственных векторов. В состав библиотеки, в частности, входят итерационные модули, реализующие численные алгоритмы, описанные выше. Однако количество модулей не фиксировано и может быть расширено разработками пользователя.

К вспомогательным относятся модули, реализующие алгоритм ортогонализации приближенного решения к вектору, соответствующему нулевому собственному числу, а также модули, осуществляющие экстраполяцию по Ричардсону.

Модули, организующие обмен с магнитными барабанами, считаются служебными.

Одним из наиболее важных элементов пакета программ ЭДИП является система обработки результатов расчета. Сущность работы сервисных модулей составляет выдача компонентов напряженностей электромагнитного поля, характеристического сопротивления и других в наглядной форме на АЦПУ и/или на графопостроитель в виде таблиц, графиков, рисунков. При выдаче на графопостроитель предусмотрен заказ тиража и требуемых пользователю размеров рисунка.



Таким образом, совокупность сервисных модулей и входного проблемно-ориентированного языка составляет основу при использовании ППП ЭДИП для автоматизированного проектирования СВЧ-приборов и делает его доступным рядовому пользователю.

**4. Функциональные характеристики.** Описываемый пакет прикладных программ ЭДИП предназначен для расчета электромагнитных

волн и интегральных характеристик электродинамических систем, включающих в себя регулярные волноводы, аксиально-симметричные резонаторы. Решение рассматриваемого класса задач сводится к решению двумерного уравнения (2) со смешанными краевыми условиями (3) для областей практически произвольной формы с границей, составленной из кривых второго порядка. Используемые в пакете программ численные алгоритмы позволяют рассчитывать одну или несколько основных гармоник.

При автоматизации построения пятиточечных конечно-разностных аппроксимаций применяется кусочно-равномерная разностная сетка. Общий объем разностной сетки может быть задан до 15 000 узлов и зависит, вообще говоря, от сложности геометрии области, учета особых точек, количества вычисляемых собственных значений и т. п. Для уточнения численного решения в случае необходимости предусмотрен алгоритм, учитывающий асимптотическое поведение решения в окрестностях угловых точек границы, точек смены типа граничных условий. Расчеты проводятся с использованием последовательности сеток, и решения уточняются методом экстраполяции по Ричардсону.

Накопленный опыт решения практических задач приводит к выводу о том, что использование перечисленных возможностей позволяет получать решение с точностью до четырех-пяти верных десятичных знаков при расчете основного типа колебаний; точность решения для высших типов на один-два порядка меньше.

Время счета одного варианта задачи существенно зависит от требуемой точности решения, конфигурации границы, использования тех или иных возможностей для уточнения численного решения и т. д., однако в среднем оно не превышает 5 мин машинного времени при произвольном начальном приближении.

Для иллюстрации эффективности численного моделирования приведем пример расчета ячейки замедляющей системы, изображенной на рисунке. Расчетные данные сопоставлялись с результатами работы [5], в которой приведены данные численного моделирования и натурных испытаний.

Задание на входном языке АЛАДИН для расчета  $E$ -колебаний и выдачи на графопостроитель характеристик поля может быть записано в следующем виде:

АЛАДИН:

/\*ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА\*/

ТОЧКИ: (0,0); (0,1.29); (.68,1.29); (.68,.77); (.97,.68); C1:

(.84,.77); (1.38,1.27); (3.343,1.25); (4.58,0); C2: (3.33,0)\*

КОНТУР: Д(1,2,3); Н(3,4,5.— C1,7,8,9. C2,1)\*

СЕТКА: 0(3)5(4)1.15(3)2(5)4.58; 0(3)4(6).77(4)1.29\*

СИММЕТРИЯ\* ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СЕТОК\*

МАССИВ: 15000\* ТОЧНОСТЬ: EG = .000001\*

РИСУНКИ: R0; HФ, EZ (R = 0,.1,.5,.84)\*;;;

Смысловое значение операторов в приведенном примере задания состоит в следующем. Оператор ТОЧКИ вводит координаты характерных точек границы (см. рисунок), присваивая им имена (например, C1 и C2)

или номера по порядку их расположения в записи. Собственно КОНТУР описывает геометрию области и задает однородные граничные условия Дирихле и Неймана на тех или иных участках границы, проходящих через указанные точки. Конечно-разностная сетка определяется оператором СЕТКА, где в скобках указано число разбиений в соответствующем интервале. Оставшиеся операторы задают точность решения, описывают наличие плоскости симметрии в геометрии области, предписывают решение задачи последовательности сеток так, чтобы количество элементов массива решения на последней сетке не превышало 15 000. Оператор РИСУНКИ определяет выдачу на графопостроитель характеристического сопротивления, линий равного уровня компоненты поля  $H_\phi$  и графиков компоненты поля  $E_z$  при фиксированных значениях  $r$ .

Следует отметить, что первые три оператора являются обязательными в любом задании, а все служебные слова и выражения, определяющие тот или иной оператор, могут сокращаться до четырех символов.

Совпадение в результатах расчета основной частоты с экспериментальным числом показывает относительную погрешность менее 0,01%, что превышает точность расчета по специализированной программе, описанной в указанной работе. По-видимому, это можно объяснить использованием неравномерной сетки при решении задачи. Сгущение шага сетки в областях с высокими градиентами поля, как и следовало ожидать, является дополнительным резервом повышения точности расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Численные методы расчета электромагнитных полей свободных волн и колебаний в регулярных волноводах и полых резонаторах.— Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 5.
2. Halbach K., Holsinger R. F. SUPERFISH — a Computer Program for Evaluation of RF Cavities with Cylindrical Symmetry.— Part. Accel., 1976, vol. 7, p. 213—222.
3. Карлинер М. М. и др. LANS — программа для вычисления электромагнитных полей и собственных частот аксиально-симметричных резонаторов.— Новосибирск: изд. ИЯФ СО АН СССР, 1979. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИЯФ; № 79—59).
4. Дайковский А. Г. и др. Программа SUPERFISH1 для расчета электромагнитных полей аксиально-симметричных резонаторов.— Серпухов: изд. ИФВЭ, 1980. (Препринт/АН СССР, ИФВЭ; № 80—19).
5. Лихарев А. Н., Пироженко В. М. Математическое моделирование электромагнитных полей в резонаторах линейных ускорителей.— Тр. Моск. радиотехн. ин-та, 1974, № 20, с. 32—46.
6. Лысенко В. Я., Шишков А. А. Программа расчета параметров аксиально-симметричных резонаторов и регулярных волноводов.— Электрон. техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1975, № 4.
7. Григорьев А. Д., Силаев С. А., Янкевич В. Б. Численный расчет электромагнитного поля в полых резонаторах и волноводах методами конечных элементов и конечных разностей.— Электрон. техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1978, № 5.
8. Григорьев А. Д., Силаев С. А., Янкевич В. Б. Программа анализа и оптимизации параметров полых резонаторов с осевой симметрией и регулярных волноводов.— Электрон. техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1978, № 6.
9. Янкевич В. Б. Разработка и исследование машинных методов анализа и оптимизации электродинамических систем электровакуумных приборов СВЧ: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук.— Л.: изд. ЛЭТИ, 1978.
10. Горбенко Н. И. и др. Пакет программ ЭРА для автоматизации электрооптических расчетов.— В кн.: Численные методы решения задач электронной оптики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1980.
11. Гаврилин А. В. Конечно-разностная аппроксимация задачи Дирихле в областях с угловыми точками: Семинар «Методы вычислительной и прикладной математики»/Под рук. Г. И. Марчука.— Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1981. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 78).
12. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
13. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М.: ИЛ, 1963.
14. Bath K. J., Wilson E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis.— New Jersey: Prentice — Hall, 1976.
15. Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем.— М.: Наука, 1979.
16. Гаврилин А. В. Автоматизация решения задач электродинамики.— Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1980. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 268).

Поступила в редакцию 21 октября 1981 г.