

## ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

УДК 519.688

В. П. ИЛЬИН, В. А. КАТЕШОВ  
(Новосибирск)

### ПАКЕТ ПРОГРАММ ЭФИР ДЛЯ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ И ИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

**Введение.** Пакет прикладных программ ЭФИР предназначен для расчета двумерных (осесимметричных и плоских) электростатических полей и их возмущений, обусловленных вариациями электродов. Учитываются возмущения первого порядка сдвига, поворота и эллиптической трансформации осесимметричных поверхностей [1, 2].

Математическая задача формулируется в виде интегральных уравнений для потенциала простого слоя, причем граничные условия для возмущений потенциала выражаются через производные решения исходной невозмущенной задачи. Решения интегральных уравнений вычисляются с помощью  $B$ -сплайновых аппроксимаций плотности потенциала и принципа коллокаций. Система алгебраических уравнений строится относительно коэффициентов сплайнового разложения потенциала (или его гармоник). Вспомогательные интегралы вычисляются с помощью гауссовых квадратур с учетом асимптотического поведения в окрестности особых точек аналогично [3, 4]. Для решения системы алгебраических уравнений используется процедура MATIN 1 [5], а также эффективные алгоритмы ортогонализации [6] с апостериорными оценками погрешностей вычислений.

Пакет позволяет проводить расчеты полей для различного количества граничных отрезков прямых или окружностей. На участках границы могут задаваться краевые условия 1-го, 2-го, 3-го родов или условия сопряжения на поверхностях раздела сред с различными диэлектрическими свойствами. Граница расчетной области может быть одно- или многосвязной, замкнутой или разомкнутой. Пакет включает входной язык ВК, позволяющий наглядно и оперативно описывать информацию о краевой задаче и задание на расчет. Вся программа, включая транслятор с языка ВК, имеет модульную структуру и написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV, что дает возможность использовать ее на ЭВМ БЭСМ-6 и ЭВМ серии ЕС.

**Математическая постановка и численные алгоритмы.** Электростатический потенциал  $\varphi(x, y)$  в двумерной области определяется как решение уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где случай  $\alpha = 0$  относится к плоским задачам, а  $\alpha = 1$  — к осесимметричным.

Границей  $\Gamma$  области рассматривается состоящей из кусочно-гладких участков  $\Gamma_i$ , на каждом из которых задано условие 1-го, 2-го или 3-го родов либо условие сопряжения на границе раздела двух сред [4].

Помимо описанной «основной» задачи, рассматривается задача расчета возмущений потенциала при малых вариациях граничных поверхностей с краевыми условиями 1-го рода. Остановимся на формулировке неосесимметричных возмущений в цилиндрической системе координат: сдвиг или поворот поверхности относительно оси симметрии или же эллиптическая «сплюснутость». В этом случае задача расчета трехмерного потенциала  $\varphi(r, z, \theta)$ , удовлетворяющего уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2)$$

сводится к осесимметричным краевым задачам для отдельных гармоник возмущения. Представляя потенциал в виде ряда Фурье

$$\varphi(r, z, \theta) = \varphi_0(r, z) + \psi_0(r, z) + \psi_1^{(1)}(r, z) \cos \theta + \\ + \psi_1^{(2)}(r, z) \sin \theta + \psi_2^{(1)}(r, z) \cos 2\theta + \psi_2^{(2)}(r, z) \sin 2\theta + \dots, \quad (3)$$

где  $\varphi_0(r, z)$  — решение невозмущенной осесимметричной задачи, получаем, что каждая из гармоник удовлетворяет уравнению

$$\Delta_m \psi_m^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_m^{(i)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_m^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi_m^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Пусть осесимметричная поверхность  $\Gamma$  с заданным на ней потенциалом  $v$  подвергается следующим неосесимметричным вариациям: сдвигам относительно осей  $x, y$  на величины  $\delta, \kappa$  соответственно, поворотам относительно осей  $x, y$  соответственно на углы  $\beta, \gamma$  и «эллиптическому» искажению со степенью эллиптичности  $\varepsilon$ . Последняя величина определяется следующим образом: если круг радиусом  $R$  превращается в эллипс с длинами полуосей  $a, b$  и таким же периметром ( $a = R(1 + \varepsilon)$ ,  $b = R(1 - \varepsilon)$ ,  $2R = a + b$ ), то  $\varepsilon = (a - b)/(a + b)$ ; если же получаемый эллипс касается круга изнутри ( $a = R$ ,  $b = R(1 - \varepsilon)$ ), то  $\varepsilon = (a - b)/a$ .

Поскольку мы рассматриваем только возмущения первого порядка относительно малых параметров  $\varepsilon, \delta, \gamma, \kappa, \beta$ , то можно записать

$$\varphi(r, z, \theta) = \varphi_0(r, z) + \varepsilon \psi_\varepsilon + \delta \psi_\delta + \gamma \psi_\gamma + \kappa \psi_\kappa + \beta \psi_\beta. \quad (5)$$

Разлагая далее каждую из функций  $\psi_\varepsilon, \psi_\delta, \psi_\gamma, \psi_\kappa$  в ряд Фурье вида (3), для гармоник возмущения получаем

$$\Delta \psi_\varepsilon^{(0)} = \Delta_1 \psi_\delta = \Delta_1 \psi_\gamma = \Delta_1 \psi_\kappa = \Delta_2 \psi_\varepsilon^{(2)} = \Delta_1 \psi_\beta = 0, \\ \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^{(0)} + \psi_\varepsilon^{(2)}, \quad \psi_\varepsilon^{(0)}|_\Gamma = -\frac{R}{2} \varphi_r^0, \quad \psi_\varepsilon^{(2)}|_\Gamma = -\frac{R}{2} \varphi_r^0, \\ \psi_\delta|_\Gamma = -\varphi_r^0, \quad \psi_\gamma|_\Gamma = -z \varphi_r^0, \quad \psi_\kappa|_\Gamma = -\varphi_r^0, \quad \psi_\beta|_\Gamma = -z \varphi_r^0. \quad (6)$$

В (6) для любой из гармоник подразумевается, что на невозмущенных границах задаются нулевые краевые условия 1-го рода.

Решение рассматриваемых краевых задач ищется в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(P) = \int_\Gamma \sigma(Q) G(P, Q) dS, \quad Q \in \Gamma. \quad (7)$$

С учетом граничных условий краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям относительно плотности  $\sigma(Q)$  [4].

После нахождения  $\sigma(Q)$  потенциал в любой точке  $P$  расчетной области вычисляется по формуле (7), а его производные — по аналогичному соотношению, получаемому дифференцированием подынтегрального члена в (7).

Гармоники возмущений  $\psi_m$ , удовлетворяющие уравнениям  $\Delta_m \psi_m = 0$ , также определяются с помощью интегрального представления

$$\psi_m(P) = \int_\Gamma \sigma_m(Q) G_m(P, Q) dS, \quad Q \in \Gamma. \quad (8)$$

Поскольку для всех гармоник  $\psi_m$  ставятся краевые условия 1-го рода, функции  $\sigma_m(P)$  удовлетворяют интегральным уравнениям типа (8), ядра которых имеют вид [7]

$$G_m(P, Q) = \frac{2r'}{R} \int_0^\pi \frac{\cos m\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}}, \quad k = 2 \sqrt{rr'}/R, \quad R = \sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}. \quad (9)$$

При аппроксимации интегральных уравнений отдельные участки границы описываются в параметрической форме, а плотность потенциала представляется функцией параметра  $\sigma = \sigma(\tau)$ , которая на каждом односвязном участке границы аппроксимируется с помощью  $B$ -сплайнов [8]. Если значения функции  $\sigma(t)$  известны в  $N+1$  точках  $t_k$  интервала  $[a, b]$ , то  $B$ -сплайновая аппроксимация определяется формулой

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=-p}^{N+p} c_k B_k^{(n)}(t), \quad (10)$$

где  $B_k^{(n)}(t)$  —  $B$ -сплайн  $n$ -го порядка,

$$B_k^{(n)}(t) = (n+1) \sum_{l=k-\alpha}^{k+p} \frac{(\bar{t}_l - t)_+^n}{\omega_{k-l}'(\bar{t}_l)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$\omega_k(t) = (t - \bar{t}_{k-\alpha})(t - \bar{t}_{k+1-\alpha}) \dots (t - \bar{t}_{k+\beta}).$$

Если  $n+1$  — нечетное число, то  $\alpha = n/2$ ,  $\beta = \alpha + 1$ ,  $p = \alpha$ , в противном случае  $\alpha = \beta = (n+1)/2$ ,  $p = (n-1)/2$ . В (11)  $\bar{t}_k$  — узлы сплайна, которые для  $n=3$  совпадают с точками  $t_k$ , а для  $n=2$  лежат посередине между  $t_{k-1}$ ,  $t_k$ .

Для однозначного определения сплайнового интерполянта на концах интервала  $a, b$  задаются краевые условия одного из следующих видов:

$$\begin{aligned} \sigma_n'(a) &= A, & \sigma_n'(b) &= B, \\ \sigma_n''(a) &= C, & \sigma_n''(b) &= D, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A, B, C, D$  — числа, выбираемые из априорных соображений о характере поведения интерполируемой функции в окрестности концов интервала. Если функция  $\sigma(t)$  на участке границы  $\Gamma$  периодическая (например,  $\Gamma$  является замкнутым электродом, и точки  $a, b$  совпадают), то на сплайн накладываются условия периодичности:  $\sigma_n'(a) = \sigma_n'(b)$ ,  $\sigma_n''(a) = \sigma_n''(b)$ .

Отметим, что участок границы, на котором строится один сплайн  $\sigma_n(t)$ , на самом деле может состоять из отрезков различного типа, т. е. представляет собой совокупность различных отрезков прямых или окружностей, и на них даже могут быть заданы разные краевые условия для потенциала.

Приближенное решение интегральных уравнений строится по принципу коллокации следующим образом. Пусть граница области состоит из  $L$  односвязных участков  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , уравнения которых представлены в параметрической форме. Каждый из интервалов  $[\alpha_l, \beta_l]$  изменения параметра  $\tau$  разбивается равномерно на  $N_l$  подынтервалов точками  $\tau_k$ ,  $k = l-1 + \sum_{l'=1}^{l-1} N_{l'}, \dots, l + \sum_{l'=1}^l N_{l'}$ . Общее количество точек, таким образом,  $N = L + \sum_{l=1}^L N_l$ . Для каждой из них выписывается аппроксимация одного из интегральных соотношений в зависимости от типа краевого условия на соответствующем участке границы при одновременной замене функции  $\sigma(\tau)$  ее сплайновым интерполянтом. Таким образом получаем  $N$  алгебраических уравнений относительно  $2pL + N$  неизвестных коэффициентов  $c_k$ . Добавляя затем  $2pL$  уравнений, из крае-

вых условий для сплайнов получаем систему уравнений  $(2pL + N)$ -го порядка

$$Ac = f \quad (13)$$

с квадратной матрицей  $A = \{a_{ij}\}$  и вектором неизвестных  $c = \{c_i\}$ . Элементы матрицы  $A$  из строк, соответствующих краевым условиям для сплайна, получаются путем непосредственной подстановки (10) в (12) и легко находятся. Определение элементов остальных строк требует вычисления вспомогательных интегралов. При этом ядра и их производные в осесимметричном случае рассчитываются с помощью полиномиальных представлений для эллиптических функций [9].

Ядра  $G_m(P, Q)$  в уравнениях для гармоник вычисляются с помощью следующих рядов:

$$G_m(P, Q) = (-1)^m \frac{4r'}{R} \left( A_0 + \sum_{j=1}^m S_j A_j \right),$$

$$A_0 = K(k), A_1 = \beta_1 [K(k) - E(k)], A_j = \alpha_j A_{j-1} + \beta_j A_{j-2}, j = 2, 3, \dots, \quad (14)$$

$$S_1 = 1, S_j = S_j [(-1)(k^2 - (j-1)^2)/j(j-0,5)], j = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_j = [(2j-2)/(2j-1)](1+k^2)/k^2, \beta_j = (3-2j)/(2j-1)k^2.$$

Использование аппроксимаций (14) для ядра  $G_m(P, Q)$  при  $k \leq 0,2$  (т. е. при  $r \rightarrow 0$ ) приводит к появлению больших ошибок округления. В этих случаях вычисления  $K(k)$ ,  $E(k)$  приводятся с помощью степенных рядов [10] с точностью до  $10^{-8}$ .

Вычисление интегралов выполняется с помощью квадратурных формул Гаусса различных порядков с выделением особенностей аналогично [3, 4].

Система линейных алгебраических уравнений (13) относительно коэффициентов  $c_k$  сплайнового разложения плотности  $\sigma$  имеет матрицу  $A$  общего вида, т. е. плотную и не имеющую какой-либо характерной особенности, позволяющей применять специальные алгоритмы. Для ее решения используется один из двух методов: метод Гаусса с выбором главного элемента, реализованный в процедуре MATIN1 [5], а также метод ортогонализации, взятый в комплексе процедур КОПЛА [6]. Особенность последней реализации состоит в том, что процедуры по апостериорной информации выдают гарантированные оценки погрешности решения линейной системы, вызванные плохой обусловленностью матрицы.

**Описание пакета программ.** Основные понятия входного языка. Исходные данные о краевой задаче, записанные на входном языке ВК, представляют собой последовательность списков. Списки однозначно определяют описание задачи (списки точек, граничных условий, сплайнов, типа задачи, счетных параметров).

Описание заканчивается символами «\*\*\*». Последовательность списков безразлична. Списки одного типа не должны повторяться. Каждый список начинается меткой, т. е. тремя фиксированными символами, являющимися признаком данного списка. Описание списка отделяется от метки символом «:». Между меткой и двоеточием может находиться любой набор символов, служащих комментарием. В некоторых случаях список может состоять только из метки, тогда двоеточие не обязательно, и за меткой может идти любой набор символов, окончанием которого является очередная метка.

За меткой следует описание списка, состоящее из элементов списка. Элемент списка описывает один элемент рассматриваемого типа исходной информации, например один сплайн, одну точку, одно граничное условие. Элементы списка разделяются символом «;». В элементах списка могут применяться константы, идентификаторы-параметры, нестандартные функции.

Константы определяются и записываются в соответствии с требованиями языка ФОРТРАН-IV. Идентификатор-параметр состоит из двух частей. Первая часть включает в себя только буквы и играет мнемоническую роль, вторая — цифры и представляет собой номер идентификатора-параметра. Транслятор при обработке текста на входном языке вместо идентификатора-параметра с каким-либо номером подставляет значение переменной PARM(I), определенной в программе пользователя PAR.

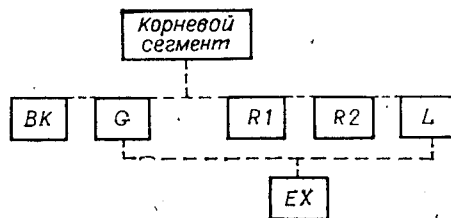


Рис. 1.

Нестандартные функции используются в случае, когда для описания необходимо более сложное выражение, чем константа или идентификатор-параметр. Их имена задаются специальным образом: первый символ есть буква *W*, а далее следуют цифры, составляющие номер данной функции. Нестандартные функции применяются при описании граничных условий. При необходимости пользователь описывает их все в процедуре-функции GRANUS.

Целые и вещественные переменные в описании списков могут даваться либо константой, либо идентификатором-параметром.

Списки точек, граничных условий и сплайнов служат для наглядного представления способа дискретизации краевой задачи; их описания даны в [11]. В списке описания типа задачи указываются виды вариаций различных электродов, необходимые расчетные характеристики полей и формы их выдачи.

В любое место описания задачи может включаться комментарий, выделенный с двух сторон символами «%». При обработке каждого списка транслятор проводит синтаксический разбор текста и при наличии ошибок выдает соответствующее сообщение.

*Структура и схема функционирования пакета.* Пакет прикладных программ ЭФИР реализован на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV и адаптирован на ЕС ЭВМ и БЭСМ-6. Для более экономичного использования оперативной памяти пакет имеет структуру с перекрытием. На БЭСМ-6 такая структура эквивалентна сегментации программ с динамической загрузкой.

На рис. 1 представлена блок-схема загрузочного модуля пакета ЭФИР, разбитого на сегменты.

Корневой сегмент постоянно находится в оперативной памяти. Анализируя входную информацию, он устанавливает, какой тип задачи будет решаться, выбирает метод решения и организует последовательность загрузки других сегментов.

Сегменты *BK*, *G*, *R1*, *R2*, *L* загружаются в оперативную память поочередно слева направо с одного и того же адреса.

Сегмент *BK* служит транслятором с входного языка. Он осуществляет ввод информации, заданной в символьном виде на языке *BK*, и перевод ее во внутреннее представление, элементы которого — простые переменные и массивы.

Сегмент *G* является основным при формировании матрицы и вектора свободных членов. Он выполняет следующие функции: предварительную подготовку информации, вычисление особенностей в угловых точках, определение координаты узлов сетки для построения сплайнов, вычисление значений *B*-сплайнов в узлах гауссовых квадратур, а также осуществляет формирование самой матрицы и правой части.

Сегменты *R1*, *R2* эквивалентны. Они реализуют решение системы линейных уравнений одним из указанных выше методов: *R1* — с помощью комплекса программ КОПЛА [6], *R2* — с помощью стандартной процедуры MATIN 1 [5].

Сегмент *L* анализирует решаемую задачу, определяет значение по-

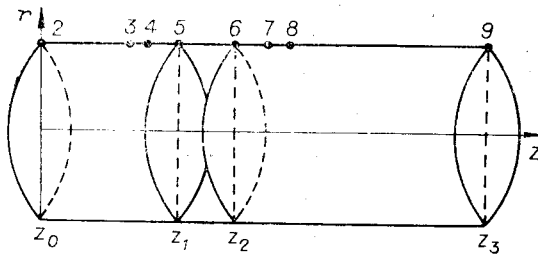


Рис. 2.

тенциала или его производных в точках, указанных во входном задании, а также вычисляет производные невозмущенного решения на границе для задач с нарушением осевой симметрии.

Сегмент  $EX$  загружается в оперативную память при вызове его процедур из сегмента  $G$  или  $L$ . Он проводит вычисление интегралов методом Гаусса

на интервалах, полученных в результате разбиения отрезков кривых.

Обмен информацией между сегментами осуществляется через внешние запоминающие устройства (МБ, МД).

**Примеры решения задач.** С целью демонстрации точности алгоритмов и формы представления исходных данных мы приводим результаты расчетов двух задач с известными решениями и описания заданий на языке ВК.

Для области, изображенной на рис. 2, решалась задача с эллиптическим нарушением осевой симметрии. Граница невозмущенной области состоит из двух коаксиальных проводящих цилиндрических трубок радиусом  $R = 1$ , основания которых  $z = z_0$  и  $z = z_3$  закрыты дисками. Поперечное сечение «возмущенной» поверхности представляет собой эллипс, для которого большая полуось  $a = R$ . Координаты краев первого цилиндра равны  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 0,546875$ , а второго —  $z_2 = 0,578125$ ,  $z_3 = 2,5$ . Первый цилиндр имеет потенциал  $U = 0$ , второй —  $U = 1$ ; при  $z \in (0,546875, 0,578125)$  считаем заданным линейное распределение потенциала. В соответствии с нашей постановкой задача сводится к уравнениям (8) для гармоник возмущения. Описание краевой задачи на входном языке в этом случае будет иметь вид:

ТОЧКИ: 1(0, 0); 2(1, 0); 5(1, 0.546875); 6(1, 0.578125);  
 3(, 0.4); 4(, 0.5);  
 7(, 0.61); 8(, 0.71); 9(, 2.5); 10(0, 2.5);  
 ГРА: 1:  $U = 0$ ; 2:  $U = 1$ ; 3:  $U = W1$ ;  
 СПЛ: 2, 4: 1(6, 4) [1(20)2, 3, 4, 5], 3[5, 6],  
 2[6, 7, 8(40)9(20)10];  
 ЗАД: ТУР = 1(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8);  
 ПЕЧАТЬ

\*\*\*

Здесь граница области задана в виде отрезков прямых, имеющих концами точки от 1-й до 10-й. Количество интервалов разбиений для отрезков (1, 2) и (9, 10) равно 20, для (8, 9) — 40, для остальных — 6. Точки 3, 4, 7, 8 включены в описание только для того, чтобы иметь возможность уменьшить шаги разбиений в окрестности точек 5, 6, где появляются самые большие производные решения. Количество гауссовых квадратурных узлов для вычисления вспомогательных интегралов для всех интервалов задано равным 4. Поверхностная плотность аппроксимируется одним сплайном второго порядка  $S_2(\tau)$  с граничными усло-

Таблица 1

$z$	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9	2,3
$U_a$	2,946	-6,476	-8,818	-4,150	-1,478	-0,358
$U_{\psi}$	2,978	-6,365	-8,759	-4,137	-1,464	-0,341
$\delta, \%$	1,1	1,7	0,7	0,3	1,0	4,7

Таблица 2

$z$	1	2	3	6	10	11
$10^3 \delta \varphi$ , %	3,7	0,02	0,03	0,08	0,02	1,1
$10^3 \delta \varphi_r'''$ , %	400	7,6	0,04	0,5	20	570
$10 \delta \varphi_r^{(1)}$ , %	0,2	1,8	2,1	2,1	0,6	5

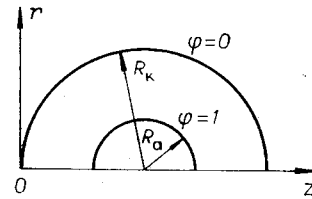


Рис. 3.

виями в точках 1 и 10  $\partial S_2 / \partial \tau = 0$ . Возмущаемая поверхность есть часть цилиндра от точки 2 до точки 8. Тип возмущения задан эллиптический (по умолчанию).

В табл. 1 приведены значения  $\partial^2 \psi_e^{(2)} / \partial r^2$  для разных  $z$ :  $U_a$  соответствуют данным из [12], полученным с помощью рядов высокого порядка,  $U_r$  — расчетам по пакету ЭФОР, а  $\delta$ , % — различию результатов в процентах. Для значений  $\varphi_0$ ,  $\psi_e^{(0)}$  и  $\psi_e^{(2)}$  различия на порядок меньше.

Для сферического конденсатора с параметрами  $R_k = 18$ ,  $R_a = 6$ ,  $U_k = 0$ ,  $U_a = 1$  (рис. 3) рассчитывались возмущения потенциала при сдвиге внешней окружности относительно оси  $r$ . Описание задачи на входном языке в этом случае имеет следующий вид:

ТОЧ: 1(0, 0); 2(, 12); 3(, 18); 4(, 24); 5(, 36);

ГРА: 1:  $U = 0$ ; 2:  $U = 1$ ;

СПЛ: 2, 4: 1(30, 4) [5, 1/3]; 2, 4: 2(10, 4) [4, 2/3];

ЗАД: ТУР = 1(1); СД; ЗН = 0(12)12;

ПЕЧ

\*\*\*

На внешней окружности задано 30 интервалов разбиений, на внутренней — 10. Число квадратур на всех интервалах равно 4. Поверхность описывается в виде двух сплайнов второго порядка с граничными условиями на концах  $\partial S_2 / \partial r = 0$ .

Невозмущенная задача имеет аналитическое решение для потенциала и производных вида

$$\varphi_a = U_a R_a z / (R_k - R_a) (R_k - z), \varphi_a''' = 6 U_a R_k R_a / (R_k - R_a) (R_k - z)^4.$$

В табл. 2 приведены значения погрешностей расчетных данных при  $r = 0$  и различных  $z$ :  $\delta \varphi$  — для потенциала «невозмущенной» задачи,  $\delta \varphi_r'''$  — для его третьей производной,  $\delta \varphi_r^{(1)}$  — для первой производной гармоники возмущения, соответствующей  $m = 1$ .

Как видно из приведенных данных, численные результаты имеют высокую точность. Время счета зависит от числа точек дискретизации границы и суммарного количества рассчитываемых значений потенциала, гармоник возмущения и их производных. Например, если число точек на границе равно 100, а количество рассчитываемых значений потенциала — 140, то время счета на БЭСМ-6 и ЕС-1060 составляет около 10 мин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sturrock P. A. The Aberrations of Magnetic Electron Lenses Due to Asymmetries.— Phil. Trans. Ser A, 1951, vol. 243, N 868.
2. Glaser W., Schiske P. Bildstörungen durch Polshuhasymmetrien bei Elektronenlinsen.— Z. für Angew. Phys., 1953, Bd 5, N 9.
3. Антоненко О. Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения.— В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск: Наука, 1968, вып. 12.
4. Иванов В. Н., Ильин В. П. Решение смешанных краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений.— В кн.: Типовые программы решения задач математической физики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.

5. Мазный Г. Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе «Дубна». — М.: Наука, 1978.
6. Липидевская З. А. Комплекс процедур по линейной алгебре. — Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1980. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 259).
7. Белоносов С. М. Интегральные уравнения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в случае тел вращения. — В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1974, вып. 12.
8. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Слайды в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.
9. Hastings C., Hayward J. Approximations for Digital Computers. — Princeton, 1955.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ФМ, 1956.
11. Ильин В. П., Катешов В. А. Автоматизация описания двумерных краевых задач. — Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1979. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 173).
12. Власов А. Г., Шахматова И. П. Поле линзы с нарушением осевой симметрии. — ЖТФ, 1962, т. XXXII, вып. 6.

Поступила в редакцию 21 октября 1981 г.

УДК 519.688

А. В. ГАВРИЛИН, В. П. ИЛЬИН

(Новосибирск)

### ПАКЕТ ПРОГРАММ ЭДИП ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. Введение. Настоящая работа содержит описание численных методов и пакета прикладных программ (ППП) ЭДИП для решения двумерных задач электродинамики в постановке, сводящейся к решению задачи о свободных волнах и колебаниях.

Известно, что свободные колебания в электродинамической системе с однородным заполнением описываются однородными уравнениями Максвелла, которые в случае гармонической зависимости полей от времени вида  $e^{-i\omega t}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega \epsilon \mathbf{E} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega \mu \mathbf{H} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — амплитуды напряженности электрического и магнитного полей,  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\omega$  — круговая частота изменения поля.

На поверхности электродинамической системы поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют заданным граничным условиям.

Рассмотрим далее решение уравнения

$$Lu \equiv -x_1^v \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{x_1^v} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \lambda u \text{ в } \Omega \quad (2)$$

относительно некоторой неизвестной функции  $u$  и числа  $\lambda = -\omega^2 \epsilon \mu$ , где  $\Omega \subset E_2$  — двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Сведение системы уравнений (1) к уравнению (2) возможно в тех частных случаях, когда исследуемая электродинамическая система является регулярным волноводом (при этом  $v = 0$ ,  $\Omega$  — поперечное сечение волновода) или аксиально-симметричным резонатором ( $v = 1$ ,  $\Omega$  — часть меридиональной плоскости, ограниченная контуром образующей резонатора и, быть может, осью симметрии). Граничные условия для тех или иных типов колебаний в предположении идеальной проводимости стенок рассматриваемой системы имеют вид

$$u = 0 \text{ либо } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (3)$$