(Ленинград)

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ БЫСТРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Известные в настоящее время методы цифровой обработки сигналов подразумевают широкое использование различных дискретных ортогональных преобразований, таких, как преобразования Фурье, Адамара, Уолша и др. [1, 2]. Быстрые алгоритмы выполнения ортогональных преобразований применяются при решении задач кодирования, обнаружения, классификации сигналов и т. д. Разнообразие известных преобразований привело к появлению большого числа таких алгоритмов. Реализация каждого из них требует создания отдельных программных или аппаратных средств, что приводит к росту сложности систем обработки «сигнальной» информации.

В данном сообщении предлагается подход, который позволяет свести в единый алгоритм несколько различных быстрых преобразований. При этом от вида выполняемого преобразования зависят лишь параметры алгоритма, в то время как его структура остается неизменной, В частности, при реализации такого алгоритма на ЭВМ появляется возможность выполнения преобразований различного вида посредством одного и того же программного модуля.

Дискретное ортогональное преобразование обычно записывается в следующем виде:

$$Y = kVX, \tag{1}$$

где X — исходный вектор из N элементов, Y — результат преобразования, V — квадратная размером $N\times N$ матрица преобразования, k — нормировочный коэффициент.

Существование быстрого алгоритма для преобразования обусловливается возможностью факторизованного представления матрицы V:

$$V = V^{(r)}V^{(r-1)}\ldots V^{(1)}, \tag{2}$$

$r = \log_2 N$*. Таким образом, формула (1) принимает вид

$$Y = k(V^{(r)}(V^{(r-1)}\ \ldots\ (V^{(1)}X)\ldots)). \tag{3}$$

Здесь $V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}$ — матрицы размером $N\times N$.

Как видно из (3), вычисление преобразования (1) осуществляется рекуррентно и каждый шаг итерации соответствует умножению преобразуемого вектора на одну из матриц $V^{(i)}$:

$$X^{(i)} = V^{(i)}X^{(i-1)},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{4}$$

причем $X^{(0)} = X$, $X^{(r)} = Y$.

Так, для преобразования Адамара имеем [1]

$$V^{(i)} = I_{2^{r-i}}\times H_2\times I_{2^{i-1}}, \tag{5}$$

где I_K — единичная диагональная матрица размером $K\times K, H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\times$ — знак кронекерова произведения матриц.

Пользуясь (5), нетрудно показать, что процесс умножения каждой из матриц $V^{(i)}$ на соответствующий вектор сводится к многократному выполнению следующих простых действий:

$$x^{(i)}(q) = x^{(i-1)}(n) + x^{(i-1)}(p),\ x^{(i)}(s) = x^{(i-1)}(n) - x^{(i-1)}(p). \tag{6}$$

Здесь целочисленные индексы n, p, q, s пробегают в определенном порядке множество значений $\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$. Рассматривая факторизованные представления матриц преобразований Уолша и Пэли [1], можно убедиться, что соотношения вида (6) остаются применимыми и в этих случаях. Для преобразования Хаара к ним следует добавить еще одну простую операцию:

$$x^{(i)}(u) = x^{(i-1)}(u), \tag{7}$$

где множество значений, пробегаемых индексом u, зависит от номера шага итерации i.

Однотипность структуры алгоритмов быстрых преобразований позволяет использовать единый алгоритм, в котором от вида преобразования зависит лишь порядок изменения индексов в (6) и (7). Такой алгоритм и был синтезирован для преобразований Адамара, Уолша, Пэли и Хаара. Порядок изменения индексов в нем опреде-

---

* Рассматривается случай, когда N равно целой степени числа 2.

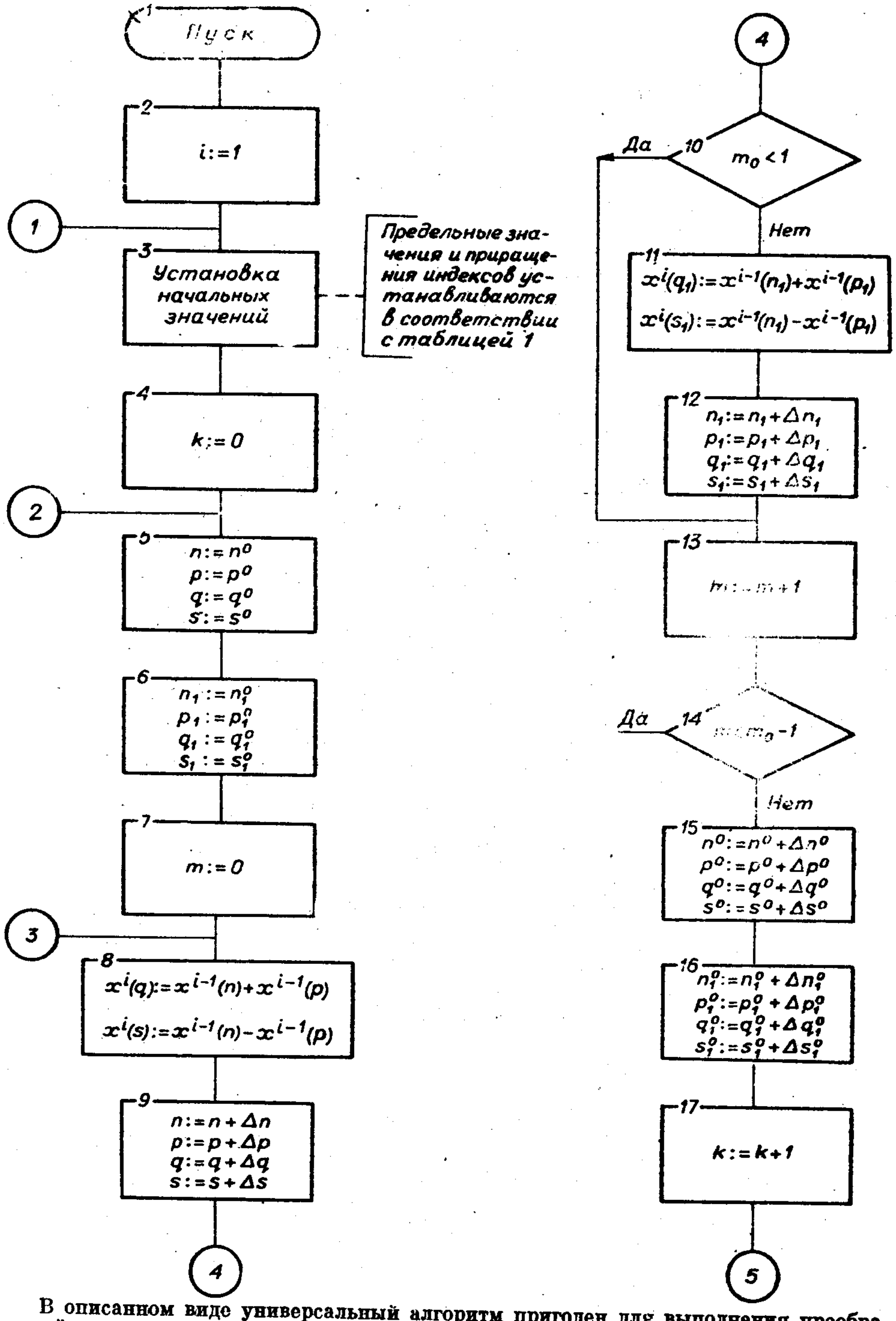
	Адамара	Уолша	Пэли	Прямое	Обратное
k_0	2^{r-i}	2^{r-i}	2^{r-i}	1	1
m_0	$[2^{i-2}]$	$[2^{i-2}]$	$[2^{i-2}]$	$[2^{r-i-1}]$	$[2^{i-2}]$
u^0	$N+1$	$N+1$	$N+1$	$2^{r-i+1}+1$	2^i+1
u^1	N	N	N	N	N
n^0	1	1	1	1	1
p^0	$2^{r-i}+1$	2	$2^{i-1}+1$	2	$2^{i-1}+1$
q^0	1	1	1	1	1
s^0	$2^{r-i}+1$	2^{r-i+1}	2	$2^{r-i}+1$	2
n_1^0	$N/2+1$	2^{r-i+2}	2	3	2
p_1^0	$N/2+2^{r-i}+1$	$2^{r-i+2}-1$	$2^{i-1}+2$	4	$2^{i-1}+2$
q_1^0	$N/2+1$	2^{r-i+2}	3	2	3
s_1^0	$N/2+2^{r-i}+1$	$2^{r-i+1}+1$	4	$2^{r-i}+2$	4
Δn	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	2	4	2
Δp	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	2	4	2
Δq	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	4	2	4
Δs	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	4	2	4
Δn_1	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	2	4	2
Δp_1	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	2	4	2
Δq_1	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	4	2	4
Δs_1	2^{r-i+1}	2^{r-i+2}	4	2	4
Δn^0	1	2	2^i	~	~
Δp^0	1	2	2^i	~	~
Δq^0	1	1	2^i	~	~
Δs^0	1	−1	2^i	~	~
Δn_1^0	1	−2	2^i	~	~
Δp_1^0	1	−2	2^i	~	~
Δq_1^0	1	−1	2^i	~	~
Δs_1^0	1	1	2^i	~	~

Примечание. Знак ~ означает, что параметр в данном режиме не используется.

ляется набором значений 28 параметров, которые устанавливаются один раз на каждом шаге итерации.

На рисунке приведена блок-схема универсального алгоритма. Таблица содержит значения параметров для преобразования Уолша, Адамара, Пэли и Хаара. В алгоритме опущены все операции, связанные с нормировкой. В силу симметричности матриц Адамара, Уолша и Пэли соответствующие прямые и обратные преобразования совпадают. Преобразование Хаара этим свойством не обладает, что и отражено в таблице.

Вычислительная сложность универсального алгоритма несколько выше, чем для традиционных алгоритмов быстрых преобразований. Операции по вычислению значений параметров выполняются лишь один раз на каждом шаге итерации, а в том случае, когда приходится обрабатывать входные последовательности одинаковой длины, эти операции можно исключить совсем, вычислив все параметры заранее. Основная причина незначительного снижения быстродействия данного алгоритма на ЭВМ (по сравнению с традиционными алгоритмами) состоит в увеличении числа индексов. Действительно, для преобразования Адамара, например, значения n и p в (6) всегда совпадают соответственно с q и s, что дает возможность не вычислять их отдельно. При реализации универсального алгоритма на языке символического кодирования ЭВМ «Минск-32» отмеченное обстоятельство дало увеличение времени его работы по сравнению с обычным преобразованием Адамара примерно на 10%. Для других преобразований данный эффект выражен слабее.



В описанном виде универсальный алгоритм пригоден для выполнения преобразований, у которых матрицы $V^{(i)}$ содержат лишь элементы со значениями 0 и ± 1 (без учета постоянных нормирующих множителей). Ценой некоторого усложнения алгоритма данный подход можно распространить и на другие преобразования, в частности на быстрое преобразование Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
2. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М.: Сов. радио, 1975.

Поступило в редакцию 11 июля 1980 г.