УДК 528.56

Е. Н. КАЛИШ

(Новосибирск)

МЕТОД МНОГИХ ОТСЧЕТОВ В ОПРЕДЕЛЕНИИ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

Определение абсолютного значения ускорения силы тяжести баллистическими методами опирается на высокоточное измерение пути и времени свободно падающего тела. В абсолютных гравиметрах, основанных на принципе свободного падения тела, измерение этих параметров проводится на двух интервалах траектории падения [1, 2]. Точность определения g зависит от точности измерения соответствующих интервалов пути и времени. При использовании цифровых измерителей характерными погрешностями измерения являются погрешности из-за дискретности счета. В случае реализации обычной схемы определения g путем измерения интервалов пути и времени на двух интервалах траектории падения тела точность единичного определения g ограничена разрешающей способностью применяемых цифровых измерителей. В этой связи представляется перспективным определение g на основе измерения пути и времени на многих интервалах траектории, что позволяет при той же самой разрешающей способности измерителей существенно повысить точность единичного определения g.

При определении абсолютного значения ускорения силы тяжести методом свободного падения используется функциональная зависимость пути S, пройденного свободно падающим телом, от времени T свободного падения. Без учета градиента силы тяжести эта зависимость представляется в виде

$$S = g(T^2/2) + v_0 T. \tag{1}$$

Поскольку выражение (1) содержит две неизвестные величины (g — значение ускорения силы тяжести в данном пункте наблюдений и v_0 — скорость свободно падающего тела в момент начала измерений), для вычисления g необходимо произвести измерения S и T на двух интервалах траектории падения. Увеличение числа интервалов измерений приводит к системе несовместных уравнений (вследствие погрешностей измерения пути и времени).

Рассмотрим следующую схему измерений. Пусть за время свободного падения проведены измерения на N интервалах траектории, причем начала всех интервалов совпадают. Таким образом, для каждого интервала имеем следующие пары измеренных значений: (S_1, T_1) (S_2, T_2) ... ... (S_N, T_N), которые с учетом (1) образуют систему уравнений:

$$\begin{aligned} S_1 &= g\left(T_1^2/2\right) + v_0 T_1, \\ S_2 &= g\left(T_2^2/2\right) + v_0 T_2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_N &= g\left(T_N^2/2\right) + v_0 T_N. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя метод наименьших квадратов, найдем оптимальное значение g исходя из условия $F(g, v_0) = \sum_{i=1}^{N} \left(g\left(T_i^2/2\right) + v_0 T_i - S_i\right)^2 = \min$. Вычисляя $\frac{\partial F}{\partial g}$ и $\frac{\partial F}{\partial v_0}$ и приравнивая их к нулю, получаем систему нормальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} S_i T_i &= \frac{g}{2} \sum_{i=1}^{N} T_i^3 + v_0 \sum_{i=1}^{N} T_i^2, \\
\sum_{i=1}^{N} S_i T_i^2 &= \frac{g}{2} \sum_{i=1}^{N} T_i^4 + v_0 \sum_{i=1}^{N} T_i^3,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

откуда

$$
g = 2\left(\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} S_i T_i^2 - \sum_{i=1}^{N} T_i^3 \sum_{i=1}^{N} S_i T_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2\right). \tag{4}
$$

ходимых падающим телом за заданные равноувеличивающиеся интервалы времени. В этом случае $T_i = i\tau$, где τ — величина первого интервала времени, причем $\tau = T/N$, T — полное время измерения. С учетом этого выражения (4) преобразуется в

$$
g = \frac{120N^2}{T^2} \frac{2(2N+1)\sum_{i=1}^{N} S_i i^2 - 3N(N+1)\sum_{i=1}^{N} S_i i}{N(N+1)(3N^4+6N^3-N^2-4N-4)}. \tag{5}
$$

Погрешность определения g обусловливается только погрешностями измерения интервалов пути ΔS_i и может быть представлена в форме

$$
\Delta g_S = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Delta S_i, \tag{6}
$$

где $\alpha_i = \frac{\partial g}{\partial S_i}$.

Погрешности, возникающие вследствие дискретности счета в цифровых измерителях, при данной схеме измерений оказываются, вообще говоря, коррелированными. Однако введением специальных мер, например при использовании в измерителе тактовой частоты, модулированной шумовым сигналом ограниченного диапазона [3], корреляционные связи можно разрушить и считать, что погрешности ΔS_i независимы. Кроме того, поскольку статистические характеристики погрешности цифровых измерений для всех интервалов измерения одни и те же, т. е.

$$
\overline{\Delta S_1} = \overline{\Delta S_2} = \dots = \overline{\Delta S_N} = 0 \text{ и } \overline{(\Delta S_1)^2} = \overline{(\Delta S_2)^2} = \dots = \overline{(\Delta S_N)^2} = \sigma_S^2,
$$

средний квадрат погрешности определения g оказывается равным

$$
\overline{(\Delta g)^2} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \overline{(\Delta S_i)^2} = \sigma_S^2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 = \frac{480N^4(2N+1)\sigma_S^2}{T^4 N(N+1)(3N^4+6N^3-N^2-4N-4)}. \tag{7}
$$

Из этого выражения видно, что при заданных параметрах гравиметра (позволяющих реализовать свободное падение тела в течение интервала

N	2	3	5	10	50	100	250	500	1000
γ_S	1	0,864	0,730	0,525	0,276	0,197	0,126	0,089	0,063
γ_T	1	0,771	0,602	0,441	0,206	0,147	0,093	0,066	0,046

времени T) и заданных характеристиках измерителя (среднеквадратическая погрешность измерения σ_S) точность единичного определения g может быть повышена путем увеличения числа интервалов измерения. В таблице представлено отношение $\gamma_S = \sqrt{\overline{(\Delta g_N)^2}} \Big/ \sqrt{\overline{(\Delta g_2)^2}}$ среднеквадратической погрешности определения g с помощью многих интервалов измерения к среднеквадратической погрешности определения g традиционным методом измерения на двух интервалах. Отметим, что при $N \gg 1$ $\gamma_S \approx 2/\sqrt{N}$, т. е. обратно пропорционально корню квадратному из числа интервалов измерения.

Если проводится измерение времени прохождения падающим телом заданных интервалов пути, то значение ускорения силы тяжести g также находится из соотношения (4), однако погрешность определения g в этом случае описывается более сложным выражением. Действительно, поскольку суммарная ошибка вычисления g обусловливается погрешностями измерения интервалов времени, то погрешность измерения интервала времени ΔT_i войдет в ошибку Δg с весовым коэффициентом

$$\beta_i = \frac{\partial g}{\partial T_i} = 2\,\frac{2T_i \sum\limits_{k=1}^{N} S_k T_k^2 + 2T_i S_i \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^2 - 3T_i \sum\limits_{k=1}^{N} S_k T_k - S_i \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^3}{\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum\limits_{k=1}^{N} T_i^3\right)^2} - $$

$$- g\,\frac{2T_i \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^4 + 4T_i^3 \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^2 - 6T_i^2 \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^3}{\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2}. \qquad (8)$$

Используя (2), полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\beta_i = 2T_i (gT_i + v_0)\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} T_k^3 - T_i \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} T_k^2 \sum\limits_{k=1}^{N} T_k^4 - \left(\sum\limits_{k=1}^{N} T_k^3\right)^2}. \qquad (9)$$

Тогда с учетом вышеизложенного относительно погрешностей цифровых измерителей

$$\overline{(\Delta g_T)^2} = 4\sigma_T^2\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 (gT_i + v_0)^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2 + \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^4 (gT_i + v_0)^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2\right)^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2\right]^2} - $$

$$- 8\sigma_T^2\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3 (gT_i + v_0)^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3}{\left[\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^2 \sum\limits_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2\right]^2}. \qquad (10)$$

Анализ выражения (10), который ввиду его громоздкости здесь не приводится, показывает, что среднеквадратическая погрешность имеет тот же самый характер зависимости от числа интервалов измерения, что и в предыдущем случае. В таблице представлено отношение γ_T среднеквадратической погрешности определения g, которая получается при реализации метода измерения времени прохождения падающим телом заданных равноувеличивающихся интервалов пути ($S_i = S(i/N)$), к среднеквадратической погрешности определения g этим же методом при измерении на двух интервалах. Исходные параметры гравиметра (полный интервал измерения S, начальная скорость v_0 и среднеквадратическая погрешность измерения временных интервалов σ_T) во всех случаях сохраняются.

Следует отметить, что метод определения ускорения силы тяжести путем измерения параметров движения на многих интервалах траектории падения не приемлем в случае последовательного расположения интервалов. Для примера рассмотрим схему, основанную на измерении интервалов пути, проходимых падающим телом за заданные интервалы времени. При этом считаем, что все интервалы времени одинаковы и равны $\tau = T/N$, где T — полное время падения, а конец каждого предыдущего интервала совпадает с началом каждого последующего. Тогда путь, пройденный телом за время τ на i-м интервале траектории, представляется как

$$S_i = ((2i-1)/2)g\tau^2 + v_0\tau. \tag{11}$$

Используя метод наименьших квадратов, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N} S_i = g\frac{\tau^2}{2}N^2 + v_0\tau N,\\ \sum_{i=1}^{N} S_i i = g\frac{\tau^2}{12}(4N^3 + 3N^2 - N) + v_0\tau\frac{N(N+1)}{2},\end{gathered} \tag{12}$$

откуда

$$g = (6/\tau)\left[2\sum_{i=1}^{N} S_i i - (N+1)\sum_{i=1}^{N} S_i\right]\Big/ N(N^2-1). \tag{13}$$

При этом среднеквадратическая погрешность определения g, обусловленная погрешностями цифровых измерений, равна

$$\varepsilon_g = (2\sigma_S/T^2)[N[3(N^3 + 3N^2 + 2N)]^{1/2}/(N^2-1)] \tag{14}$$

и при $N \gg 1$ $\varepsilon_g \approx (2\sigma_S/T^2)\sqrt{3N}$.

Полученный результат показывает, что при измерении на последовательно расположенных интервалах траектории увеличение числа интервалов приводит к возрастанию среднеквадратической ошибки определения g. (Аналогичную зависимость $\overline{(\Delta g)^2}$ от N можно получить и в случае определения ускорения силы тяжести на основе измерения интервалов времени, затрачиваемых свободно падающим телом на прохождение фиксированных и последовательно расположенных отрезков пути.)

Увеличение среднеквадратической погрешности при увеличении числа интервалов измерения — результат, который требует некоторых пояснений. Дело в том, что в случае измерений на параллельно расположенных интервалах траектории относительная точность измерения в среднем по всем интервалам не изменяется при увеличении числа интервалов измерения, поэтому использование метода наименьших квадратов как вида статистической обработки позволяет уменьшить среднеквадратическую погрешность определения g. В случае последовательно расположенных интервалов относительная точность измерений на каждом интервале падает пропорционально числу интервалов измерения, т. е. значительно быстрее, чем повышение точности, достигающееся статистической обработкой.

Все приведенные выше результаты были получены в предположении, что сила тяжести в любой точке траектории падения одна и та же. В реальном случае необходимо учитывать влияние градиента силы тяжести U_{zz}. Наличие градиента силы тяжести приводит к тому, что в течение свободного падения за тот же самый интервал времени T тело проходит больший путь. Эффективное увеличение интервала пути S_i составляет [4]

$$\delta S_i = (U_{zz}T_i^2/2)(H_0 + v_0T_i/3 + gT_i^2/12), \tag{15}$$

где H_0 — путь, пройденный телом от начала падения до момента начала измерений.

Используя выражение (4) для определения значения g в случае измерения параметров движения свободно падающего тела на многих интервалах траектории падения, найдем ошибку вычисления g вследствие неточности длины интервала:

$$\delta g = 2\left(\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} \delta S_i T_i^2 - \sum_{i=1}^{N} T_i^3 \sum_{i=1}^{N} \delta S_i T_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2\right). \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) позволяют непосредственно вычислить величину поправки на градиент силы тяжести к значению g, найденному из (4):

$$\Delta g_{U_{zz}} = -U_{zz}\left[H_0 + \frac{v_0}{3}\,\frac{\sum_{i=1}^{N} T_i^5 \sum_{i=1}^{N} T_i^2 - \sum_{i=1}^{N} T_i^4 \sum_{i=1}^{N} T_i^3}{\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{g}{12}\,\frac{\sum_{i=1}^{N} T_i^6 \sum_{i=1}^{N} T_i^2 - \sum_{i=1}^{N} T_i^5 \sum_{i=1}^{N} T_i^3}{\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \sum_{i=1}^{N} T_i^4 - \left(\sum_{i=1}^{N} T_i^3\right)^2}\right]. \quad (17)$$

В заключение отметим, что метод определения g путем измерения параметров движения на многих интервалах траектории падения требует для своей реализации определенного усложнения аппаратуры. Так, например, необходимо иметь либо многоканальный измеритель (пути или времени в зависимости от выбранной схемы измерения), либо одноканальный измеритель с возможностью вывода информации в требуемые моменты без его остановки. Усложнение вычислительных процедур в этом методе не играет решающей роли, поскольку практически все баллистические гравиметры содержат ЭВМ для вычисления значения g и статистической обработки повторных измерений. Проведение повторных измерений с целью повышения точности определения g связано с большими затратами времени. Использование метода многих интервалов фактически равносильно проведению повторных измерений с той лишь разницей, что здесь необходимая статистика набирается за один бросок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hammond J., Faller J.** Laser-Interferometer System for the Determination of the Acceleration of Gravity.— LEEE J. Quantum Electronics, 1967, vol. QE-3, N 11.
2. **Арнаутов Г. П. и др.** Высокоточный лазерный гравиметр.— Автометрия, 1972, № 5.
3. **Сорден.** Измерительный счетчик HP5345A — прибор 80-х годов.— Электроника, 1974, № 3.
4. **Арнаутов Г. П., Гик Л. Д., Калиш Е. Н., Стусь Ю. Ф.** Исследование систематических погрешностей измерения ускорения силы тяжести методом свободного падения.— В кн.: Измерение абсолютного значения гравитационного ускорения/Под ред. чл.-кор. АН СССР Ю. Е. Нестерихина. Новосибирск: изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1972.

Поступила в редакцию 26 марта 1981 г.