

Таблица 4

i	$\hat{\gamma}_i$	r_{1i}	r_{2i}	$r_{3, 4i}$	r_{5i}	$\tilde{\gamma}_i$	\hat{H}_i
1	0,149	0,296	0,333	0,231	0,140	0,151	4,990
2	0,166	0,286	0,303	0,223	0,188	0,169	4,419
3	0,168	0,222	0,296	0,248	0,234	0,173	4,280
4	0,187	0,207	0,281	0,258	0,254	0,195	3,625
5	0,187	0,160	0,265	0,279	0,296	0,197	3,552
6	0,201	0,143	0,251	0,290	0,316	0,216	3,020
7	0,206	0,112	0,221	0,318	0,349	0,228	2,772
8	0,223	0,094	0,182	0,341	0,383	0,254	2,043

нения кода введем поправку на ложные градации в $\hat{\gamma}_i$, при этом заметим, что величина $\hat{\gamma}_i$ существенно влияет на длину кода. Для коррекции $\hat{\gamma}_i$ прибавим к ней $(1/4)P_{Li}$, определенную выражением (22), при этом $P_{3, 4i}$ заменим на $r_{3, 4i}$ а γ_i — на $\tilde{\gamma}_i$ (ввиду малости различия, что нетрудно видеть при сравнении табл. 3 и 4). Итак, после подстановки получим

$$\tilde{\gamma}_i = \hat{\gamma}_i(1 + r_{3, 4i}/(m_i + 1)), \quad (23)$$

результаты коррекции статистики приведены в табл. 4. Формула (23) справедлива для нечетных i , для четных i коррекция проводилась по формуле

$$\tilde{\gamma}_i = \hat{\gamma}_i(1 + r_{3, 4i}\sqrt{2}/(m_i + \sqrt{2})). \quad (24)$$

Сравнение $\tilde{\gamma}_i$ с $\hat{\gamma}_i$ показывает их хорошее соответствие друг другу и позволяет сделать следующие выводы.

1. Статистическая модель достаточно хорошо отражает статистику реальных изображений и может быть принята для решения задач кодировки и обработки изображений.

2. Состояние контурной части изображения в большой мере влияет на длину кода, поэтому задача повышения коэффициента сжатия должна решаться параллельно задаче улучшения качества изображения.

В заключение заметим, что полученную среднюю длину 1,431 бит на кодируемый элемент нельзя толковать как нижний теоретический предел. Но обсуждение путей сокращения избыточности изображений выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старков М. А. Статистическая модель бинарных изображений.— Автометрия, 1979, № 5.
2. Старков М. А. Статистическая модель изображений.— Автометрия, 1981, № 6.

Поступила в редакцию 12 мая 1981 г.

УДК 621.396.962 : 519.217

В. Г. ГАЙСОВ, Ю. Н. ГОРБУНОВ

(Челябинск)

ДВУХЭТАПНАЯ ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Введение. В ряде задач радиолокации и радиоизмерительной техники не требуется получения точных мгновенных отсчетов временных интервалов, поэтому процесс измерения может быть организован не по одному, а по серии (пачке) n импульсов. В том случае, когда изменением

измеряемого параметра можно пренебречь, инструментальную погрешность уменьшают за счет рандомизации алгоритмов измерения при использовании статистической обработки «грубых» текущих отсчетов временных интервалов. В результате этого снижается быстродействие аппаратуры, в частности измерительных счетчиков (измерение временных интервалов указанным способом составляет предмет технического приложения известного в вычислительной математике метода Монте-Карло [1, 2]).

Постановка задачи. Непосредственное использование метода Монте-Карло (метода статистических испытаний СИ) не позволяет, к сожалению, получить достаточно эффективную оценку из-за низкой скорости сходимости вычислений. Проиллюстрируем это на примере измерения повторяющихся временных интервалов. Измерение (оценивание) методом СИ проводится [3] путем подсчета числа m совпадений двух независимых последовательностей. Первая последовательность состоит из коротких квантовых импульсов (меток) с известным эталонным периодом τ_0 , вторая — из n раз повторяющегося измеряемого временного интервала длительностью τ . Вторая последовательность имеет модулированный по случайному закону период повторения T . Модуляция периода повторения измеряемых импульсов может быть создана искусственно, например путем включения в цепь запуска РЛС возбуждателя частоты повторения.

Если моменты появления измеряемых интервалов независимы и равномерно распределены в пределах интервала τ_0 , то «грубые» отсчеты временных интервалов на отдельных испытаниях будут отличаться на величину $\mu_i \tau_0$ [3], где $\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p = R\{\tau/\tau_0\}, \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p, \end{cases}$ $R\{\tau/\tau_0\}$ — функция дробной доли отношения τ/τ_0 .

Статистика совпадений $m = \sum_{i=1}^n \mu_i$ в n испытаниях распределена по биномиальному закону:

$$W\left(\frac{m}{n} / p\right) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1)$$

C_n^m — число сочетаний из n по m .

Вероятность p можно оценить по частоте совпадений $p^* = m/n$, поэтому оценка τ^* временного интервала τ

$$\tau^* = \tau_0 (E\{\tau/\tau_0\} + p^*) = \tau_0 (E\{\tau/\tau_0\} + m/n), \quad (2)$$

$E\{\tau/\tau_0\}$ — функция целой части отношения τ/τ_0 .

Средний по всем m квадрат ошибки оценки (2) с учетом выражения (1) получим в виде

$$M\{(\tau^* - \tau)^2/p\} = \tau_0^2 M\{(p^* - p)^2/p\} = \tau_0^2 D_0 = \tau_0^2 \sigma^2, \quad (3)$$

где $\sigma = \sqrt{D_0} = \sqrt{M\{(p^* - p)^2/p\}} = \sqrt{pq/n}$ — среднеквадратическая ошибка измерения вероятности p по частоте m/n ; $M\{\cdot\}$ — операция математического ожидания.

Из уравнения (3) найдем среднеквадратическую ошибку σ_τ оценки интервала τ :

$$\sigma_\tau = \sqrt{M\{(\tau^* - \tau)^2/p\}} = \tau_0 \sigma. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что погрешность σ_τ измерения интервала τ (при допустимом по быстродействию применяемой аппаратуры интервале квантования τ_0) полностью определяется погрешностью измерения σ вероятности p , которая в зависимости от числа n обрабатываемых импульсов уменьшается сравнительно медленно и имеет порядок $n^{-1/2}$.

Нетрудно показать, что оценка $p^* = m/n$ вероятности p является оценкой максимального правдоподобия, превращающей в максимум функцию правдоподобия (1).

Опуская рассмотрение очевидных вопросов о состоятельности и эффективности оценки максимального правдоподобия, следует отметить, что нижняя граница ее погрешности, полученная из неравенства Рао — Крамера [4], задается также выражением (4).

В статье дается ответ на вопрос: можно ли дополнительно повысить точность измерения вероятности p , если область оценок максимального правдоподобия расширить более общими нерекурсивными и рекурсивными байесовыми оценками.

Байесовы оценки вероятности по частоте и оценки максимального правдоподобия. Если априорную функцию распределения обозначить через $W(p)$, апостериорную — $W\left(\frac{m}{n}/p\right)$, функцию правдоподобия — $W\left(\frac{m}{n}/p\right)$, то при квадратичной функции потерь байесова оценка $p_{\text{опт}}^*$ вероятности p запишется следующим образом:

$$p_{\text{опт}}^* = \int_0^1 p W\left(\frac{m}{n}/p\right) dp = \int_0^1 \frac{p W\left(\frac{m}{n}/p\right)}{G\left(\frac{m}{n}\right)} W(p) dp. \quad (5)$$

Здесь $G\left(\frac{m}{n}\right) = \int_0^1 W\left(\frac{m}{n}/p\right) W(p) dp$ — нормировочный коэффициент.

В формуле (5) можно использовать достаточно гибкую априорную плотность вероятности $W(p)$ в виде [5] β -распределения:

$$W(p) = \frac{\Gamma(v_1 + v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} p^{v_1-1} (1-p)^{v_2-1}, \quad p \in [0, 1], \quad (6)$$

где $\Gamma(v)$ — γ -функция.

Подбором параметров v_1 и v_2 можно получить большое семейство распределений (включая равномерное при $v_1 = v_2 = 1$), соответствующих широкому кругу практических задач.

С помощью формул (1), (5), (6) получим байесову оценку

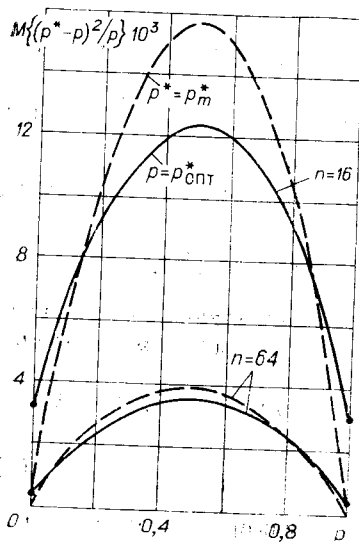
$$p_{\text{опт}}^* = (m + v_1)/(n + v_1 + v_2) \quad (7)$$

и средний квадрат ошибки измерения вероятности p для равномерного априорного закона $W(p) = 1$ ($v_1 = v_2 = 1$):

$$M\{(p_{\text{опт}}^* - p)^2/p\} = \frac{np(1-p) + (1-2p)^2}{(n+2)^2}. \quad (8)$$

Сравнивая средние квадраты ошибок байесовой и максимально правдоподобной p_m^* оценок, можно найти точки пересечения (рисунок) кривых $M\{(p^* - p)^2/p\}$: $p_{1,2} \cong (1 \pm \sqrt{0.5})/2$. Иными словами, в диапазоне $p < 0,15$ и $p > 0,85$ следует пользоваться оценкой максимального правдоподобия, в остальном диапазоне p лучше байесова оценка. Однако преимущества оценки максимального правдоподобия в указанных диапазонах достигаются лишь тогда, когда измеряемая величина лежит в них, т. е. пуста априорная информация относительно величины измеряемой вероятности.

Для повышения точности измерения или сокращения числа испытаний, когда исчерпаны все априорные сведения, необходимо



Зависимость от p условного среднего квадрата ошибки $M\{(p^* - p)^2/p\}$ для оценки максимального правдоподобия (пунктирная линия) и байесовой оценки (сплошная линия) для $n=16$ и $n=64$.

отыскивать новые резервы. Поэтапная процедура измерения вероятности, когда результаты измерений на предыдущих этапах рассматриваются как априорные сведения для последующих этапов, не дает дополнительных выигрышей. Действительно, если по результатам измерения на каждом этапе взять оценку максимального правдоподобия

$$n^*(m_i) = m_i / p_{i-1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, l.$$

(η_i — неизвестные весовые коэффициенты), причем

$$\sum_{i=1}^l \eta_i = 1. \quad (10)$$

С учетом ограничения (10) оптимальные весовые коэффициенты $\eta_{i \text{ опт}}$, $i = 1, 2, \dots, l$, минимизирующие условный средний квадрат ошибки оценки (9), получаются в виде

$$\eta_{i \text{ опт}} = n_i / \sum_{i=1}^l n_i. \quad (11)$$

Подставляя уравнение (11) в (9), будем иметь

$$p_{\Sigma}^* = \sum_{i=1}^l m_i / \sum_{i=1}^l n_i = m/n.$$

Таким образом, суммарная оценка p_{Σ}^* совпадает с оценкой максимального правдоподобия одноэтапной процедуры для $n = \sum_{i=1}^l n_i$.

Обратная связь в измерителе временных интервалов методом статистических испытаний. Предыдущие результаты определили предельные возможности метода статистических испытаний за счет использования априорных сведений. В том случае, когда априорные сведения исчерпаны полностью, необходимо найти принципиально новый резерв повышения точности метода статистических испытаний. С этой целью сделано предположение о возможности применения обратной связи в процедуре оценивания. Разобьем весь объем испытаний n на два и более этапов. Первый этап объемом n_1 представляет собой классическую схему независимых испытаний Бернулли. При выработке оценки p_1^* исходной вероятности $p = R\{\tau/\tau_0\}$ на первом этапе следует использовать все имеющиеся априорные сведения. Иными словами, оценка p_1^* является оптимальной байесовой. Далее по оценке p_1^* вырабатывается корректирующая эталонная добавка δ , которая прибавляется к исходной неизвестной величине измеряемой вероятности p . Таким образом, на втором этапе объемом n_2 проводится измерение новой величины

$$p_2 = p + \delta. \quad (12)$$

Оценка p_2^* по результатам второго этапа зависит от результатов измерений на первом этапе. По итогам двух этапов вырабатывается результирующая оценка $p_{1,2}^* = p_1^* \eta_1 + (p_2^* - \delta) \eta_2$, где η_1, η_2 — весовые коэффициенты, $\eta_1 + \eta_2 = 1$.

Следует заметить, что допущение о возможности обратной связи при измерении не всегда осуществимо. Однако измерение временных интервалов методом статистических испытаний — идеальный случай реализации

предлагаемой идеи. Для введения эталонной добавки, очевидно, можно применить линию задержки с переключением отводов. Эталонная добавка δ эквивалентна задержке заднего фронта измеряемого интервала на втором этапе на время $\delta\tau_0$. В какой-то мере родственной идеей является урновая схема Пойа [5]. Однако в схеме Пойа величина корректирующей добавки (число шаров определенного цвета) постоянна, меняется только ее знак (цвет добавляемых шаров). Предполагаемая корректирующая добавка δ есть функция предыдущих измерений $\delta = \delta(p_1^*)$.

По сути развиваемой идеи двухэтапной процедуры оценка после первого этапа p_1^* используется для создания лучших условий измерения вероятности p на втором этапе. Предыдущие результаты свидетельствуют о том, что наилучшим условием измерения p будет измерение суммы $p + \delta = 1$, так как именно при $p = 0$ или $p = 1$ условный средний квадрат ошибки наименьший.

Таким образом, алгоритм корректирующей эталонной добавки предельно прост:

$$\delta(p_1^*) = 1 - p_1^*. \quad (13)$$

Запишем выражение для среднего квадрата ошибки результирующей оценки $p_{1,2}^*$:

$$\begin{aligned} M_{1,2} \{(p_{1,2}^* - p)^2\} &= \int_0^1 \left\{ \sum_{m_1=0}^{n_1} \left[\sum_{m_2=0}^{2n_2} (p_1^* + \eta_2(p_2^* - 1) - p)^2 W\left(\frac{m_2}{n_2} \middle| m_1, p\right) \right] \times \right. \\ &\times W\left(\frac{m_1}{n_1} \middle| p\right) \left. \right\} W(p) dp = \int_0^1 \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_1} \left[(p_1^* - p)^2 - 2\eta_2(p_1^* - p) \sum_{m_2=0}^{2n_2} (p_2^* - 1) \times \right. \right. \\ &\times W\left(\frac{m_2}{n_2} \middle| m_1, p\right) + \eta_2^2 \sum_{m_2=0}^{2n_2} (p_2^* - 1)^2 W\left(\frac{m_2}{n_2} \middle| m_1, p\right) \left. \right] W\left(\frac{m_1}{n_1} \middle| p\right) \left. \right\} W(p) dp = \\ &= D_1 - 2\eta_2 D_1 + \eta_2^2 D_2, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^1 \left[\sum_{m_1=0}^{n_1} (p_1^* - p)^2 W\left(\frac{m_1}{n_1} \middle| p\right) \right] W(p) dp, \\ D_2 &= \int_0^1 \left\{ \sum_{m_1=0}^{n_1} \left[\sum_{m_2=0}^{2n_2} (p_2^* - 1)^2 W\left(\frac{m_2}{n_2} \middle| m_1, p\right) \right] W\left(\frac{m_1}{n_1} \middle| p\right) \right\} W(p) dp. \end{aligned}$$

Оптимизируя (14) по η_2 ,

$$M_{1,2\text{опт}} \{(p_{1,2}^* - p)^2\} = (D_1 - 2\eta_2 D_1 + \eta_2^2 D_2) / \eta_2 = \eta_{2\text{опт}} = \frac{D_1}{D_2} (D_2 - D_1). \quad (15)$$

Сравнивая $M_{1,2\text{опт}}$ с D_0 при условии одинакового общего объема испытаний $n = n_1 + n_2$ для случая малых $n = 2, 3, 4$ (см. таблицу), можно сделать следующие выводы:

1. Разбиение на этапы уменьшает средний квадрат ошибки измерения по сравнению с одноэтапной процедурой при одинаковом суммарном объеме n испытаний.

2. С ростом n средний квадрат ошибки при двухэтапной процедуре падает быстрее, чем при одноэтапной, так что выигрыш растет.

3. Выигрыш зависит от соотношения объемов между этапами.

Анализ среднего квадрата (15) для случая больших $n \gg 1$ затруднен в силу кусочно-непрерывного описания D_2 по статистике m_1 . Однако анализ в некоторой степени упрощается, если учесть нормализацию функции вероятности $W(p_2/p)$ с ростом n_1 .

Обозначение	«1+1»	«2+1»	«1+2»	«2+2»
n_1	1	2	1	2
n_2	1	1	2	2
$n_{2 \text{ опт}}$	9/32	32/129	18/41	64/161
D_2	16/31	43/256	123/972	161/1536
D_1	1/18	1/24	1/18	1/24
D_0	1/24	1/30	1/30	1/36
$M_{1,2 \text{ опт}}$	23/576	27/3096	23/738	97/3864
$B = (D_0 - M_{1,2 \text{ опт}})^{1/D_0}$	4	5,9	6,5	9,5

Из формул (12), (13) и (7) видно, что функция вероятности $W(p_2/p)$ является фактически биномиальной. Следовательно, с ростом n_1 справедлива асимптотика Муавра — Лапласа, в результате чего

$$W(p_2/p) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{p_2}}} \exp \left\{ -\frac{(p_2 - a)^2}{2\sigma_{p_2}^2} \right\},$$

где $\sigma_{p_2}^2$ — дисперсия функции плотности $W(p_2/p_1)$; a — среднее (по всем m_1) значение p_2 .

Учитывая преобразования (12), (13) и (7), можно показать, что

$$\sigma_{p_2}^2 = n_1 p (1 - p) / (n_1 + 2)^2, \quad a = (n_1 + 1 + 2p) / (n_1 + 2).$$

В результате усреднения по m_2 , m_1 , p выражений D_1 и D_2 из (15) с учетом приближений

$$\begin{aligned} \{ \Phi(a/\sigma_{p_2}) - \Phi(a/\sigma_{p_2} - 2) \} &\cong 2, \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{p_2}^2} (2 - a)^2 \right\} &\cong 0, \end{aligned}$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2} dt$ — интеграл Лапласа, получим

$$D_2 = \frac{1}{3(n_1 + 2)^2} + \frac{n_1(n_2 - 1)}{n_2(n_1 + 2)^2} \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n_2 \sqrt{n_1}},$$

$$D_1 = 1/6(n_1 + 2).$$

Так как $n_1, n_2 \gg 1$, то $D_2 \cong 1/6n_1 + (1/4)\sqrt{\pi/2}(1/n_2\sqrt{n_1})$, $D_1 \cong 1/6n_1$. Выражение для среднего квадрата ошибки при двухэтапной процедуре имеет вид $M_{1,2 \text{ опт}} \cong D_2 - D_1 = (1/4)\sqrt{\pi/2}(1/n_2\sqrt{n_1})$.

Исследование $M_{1,2 \text{ опт}}$ на экстремум (минимум) при фиксированном $n = n_1 + n_2$ дает следующее оптимальное соотношение между этапами: $n_2 = 2n_1$. Тогда

$$M_{1,2 \text{ опт}} \cong 3\sqrt{3\pi}/(8\sqrt{2}n\sqrt{n}) = 3^{3/2}\pi^{1/2}/(2^{7/2}n^{3/2});$$

$$\sigma_{1,2 \text{ опт}} = \sqrt{M_{1,2 \text{ опт}}} \cong 3^{3/4}\pi^{1/4}/(2^{7/4}n^{3/4}).$$

ВЫВОДЫ

1. Модуляция периода повторения измеряемых импульсов по случайному закону при измерении повторяющихся временных интервалов методом Монте-Карло позволяет при обработке n импульсов повысить точность измерения в \sqrt{n} раз.

2. Повышение точности измерения в рамках нерекурсивных (одноэтапных и многоэтапных) байесовых оценок невозможно без использования априорных сведений относительно измеряемого интервала.

3. Сделано предположение о возможности обратной связи в методе Монте-Карло и доказано, что дополнительное повышение точности измерения временных интервалов возможно в рамках рекурсивных байесовых оценок.

4. Применение рекурсивных (2-этапных) байесовых оценок измерения временных интервалов дает возможность увеличить точность измерения в $n^{1/2} - n^{3/4}$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло.— М.: Наука, 1973.
2. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы.— М.: Наука, 1975.
3. Балашов В. П. и др. Автоматизация радиоизмерений.— М.: Сов. радио, 1966.
4. Уилкс С. Математическая статистика.— М.: Наука, 1967.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 1 июля 1980 г.

УДК 621.317.7.085.36 : 621.317.7.088

В. П. ПОПОВ

(Москва)

ТОЧНЫЕ АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ И ЦИФРОАНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Постановка вопроса. Проблема обеспечения высокой точности измерения является одной из важнейших задач измерительной техники. Улучшение точностных характеристик приборов требует прежде всего обеспечения необходимой линейности преобразования. Полученная на сегодня линейность преобразования пока значительно ниже достижимой разрешающей способности прецизионных приборов: для современных цифровых вольтметров, например, разрешающая способность составляет $1:2 \cdot 10^7$, а интегральная нелинейность 10^{-4} (в течение 1 года).

К решению проблемы точности цифровых измерительных приборов идут в основном двумя путями — технологическим и структурным. Несмотря на значительные успехи в области интегральной и гибридной технологии производства аналого-цифровых и особенно цифроаналоговых [1] преобразователей, уровень параметров соответствующих приборов в модульном исполнении с применением различных структурных приемов повышения точности остается пока более высоким [2].

Можно считать установленным [3—7] тот факт, что точность АЦП сводится к точности обратного цифроаналогового преобразователя (при условии его наличия), и указать несколько алгоритмов выполнения такой процедуры. Таким образом, проблема точности АЦП может быть решена обеспечением требуемой точности ЦАП. Однако и перед разработчиками ЦАП стоит задача обеспечения необходимой точности преобразования во времени и в диапазоне температур [4].

Одной из основных составляющих погрешности измерительного прибора является его нелинейность. В настоящей статье предпринимается попытка достичь требуемой интегральной нелинейности АЦП, которая соответствовала бы его разрешающей способности, путем обеспечения необходимой нелинейности ЦАП.

Выбор метода калибровки ЦАП. Известно несколько алгоритмов калибровки и коррекции интегральной нелинейности ЦАП [7—9]. Алгоритм коррекции [8, 9] основан на последовательном сравнении каж-