8. На основании изложенного можно выделить основные особенности поразрядных алгоритмов и указать связанные с ними области приложения. Первая особенность — это темп и порядок формирования разрядных коэффициентов двоичного представления $\varphi(\mathfrak{X})$. Если результаты измерения $\varphi(\mathfrak{X})$ используются в целях управления, то опережающее начало управляющего воздействия может существенно уменьшить время завершения переходных процессов. Заслуживает внимания использование этого свойства при передаче значений $\varphi(\mathfrak{X})$ на расстояния (минимизация задержки, выравнивание информационной нагрузки в каналах связи). В частности, представляется перспективным выбор поразрядных алгоритмов в измерительных системах с последовательным интерфейсом.

В качестве второй особенности укажем на «перестановочность» числа разрядов в двоичном представлении аргумента и функции. Это свойство ПИА и ПВА, основанное на вычислении обратной функции, может оказаться средством увеличения скорости обработки данных и сокращения объема оборудования.

Отметим, наконец, что вычислитель, ориентированный на применение поразрядных алгоритмов, может работать с однобитовой шиной ввода данных (и однобитовой выходной шиной при реализации ПВА [1, 2]). Это позволяет уменьшить число контактов микросхем и может быть использовано для увеличения их функциональных, сервисных или эксплуатационных возможностей.

Автор выражает искреннюю благодарность М. П. Цапенко и О. Е. Трофимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жабин В. И.** Алгоритм неавтономного вычисления квадратного корня на цифровом устройстве, работающем в реальном масштабе времени.— Автоматика и вычислит. техника, 1977, № 1.
2. **Жабин В. И., Корнейчук В. И., Тарасенко В. П.** Методы вычисления некоторых функций при поразрядном вводе и выводе информации.— Приборостроение, 1978, № 2.

Поступила в редакцию 16 июня 1981 г.

УДК 681.32.05

О. М. КАРПОВА, М. А. СТАРКОВ

(Новосибирск)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящей работе проводятся исследования по кодированию изображений, выполненные на основании статистической модели изображений [1, 2]. Предполагается, что читатель знаком с указанными публикациями, поэтому введенные там определения и обозначения здесь не разъясняются.

Если исходное изображение задано на k-разрядной матрице размерностью $M \times N$ элементов, и, таким образом, составляет запись длиной $L = M \times N \times k$ бит, то при решении задачи кодирования, как правило, ищется более компактное представление изображений, иначе говоря, решается задача сжатия. Эффективность решения этой задачи существенно зависит от выбора модели изображения, поэтому ниже результаты теоретических расчетов приводятся в сравнении со статистикой реального изображения. Для проведения расчетов принята модель изображений

[2], статистика которых описывается следующей системой уравнений:

$$\Delta P^r_{j,k} - \lambda\left(P^r_{j,k} - \text{h}\right) = 0, \quad (j, k) \in \overline{\Omega},$$
$$P^r_{j,k} = \begin{Bmatrix} 1, & \omega_{j,k} = r \\ 0, & \omega_{j,k} \neq r \end{Bmatrix}, \qquad (j, k) \in \Omega. \tag{1}$$

Отметим два свойства изображений, которые непосредственно следуют из (1).

1. Вероятности реализации в (j, k)-й точке градаций, не наблюдаемых на Ω, равны между собой. Из этого свойства следует, что переход от градаций к градации должен происходить скачком, причем величина скачка заранее не обусловлена, иначе говоря, модель предполагает описание изображений разрывными функциями.

2. Вероятность реализации градации в (j, k)-й точке не зависит от числовых значений градаций. Отсюда следует, что r может принимать значения в нечисловых и неупорядоченных множествах, например множестве цветов, множестве векторов, множестве гладких функций и т. д. Интересно также отметить, что если изображение A преобразуется в изображение B заменой кодов градаций $\mathscr{L}_1$ на $\mathscr{L}_2$, описывающих изображения A и B соответственно, и между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ существует взаимооднозначное соответствие, то статистические и информационные характеристики изображений A и B будут одинаковы.

Рассмотрим следующий алгоритм кодирования. Разобьем множество точек, составляющих изображение, на ряд непересекающихся подмножеств по следующему правилу. Подмножество точек с координатами (nj, nk), где $n = 2^r$, обозначим через Λ_0 и заметим, что Λ_0 представляет собой квадратную сетку с шагом n. Геометрическое место центров квадратов, вершинами которых являются точки Λ_0, обозначим через Λ_1. Заметим, что объединение множеств Λ_0 и Λ_1 представляет собой опять-таки квадратную сетку, но уже с диагональю, равной n. Точки множества, расположенные в центрах квадратов с вершинами $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$, обозначим через Λ_2 и т. д. Нетрудно видеть, что объединение множеств $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$ $\ldots, \Lambda_{2k}$ включает в себя все изображение (эффекты, возникающие на границе матрицы, рассматривать не будем). Отметим также, что множество Λ_i состоит из такого же числа точек, что и множество $\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} \Lambda_j$. В канал связи будем передавать коды значений точек изображения на множестве Λ_0, затем — на множестве Λ_1 и т. д. Передача всего изображения произойдет за $2k + 1$ этапов. При передаче значений множества точек Λ_i на приемной стороне уже располагают значениями в точках $\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} \Lambda_j$, поэтому при кодировании значений на Λ_i этим можно воспользоваться.

Если n выбрано достаточно большим, т. е. точки множества достаточно удалены друг от друга, то значения сигнала в них слабо коррелированы, поэтому коды значений Λ_0 передадим в исходном виде. Для определенности будем считать, что значения изображения представлены байтами. В каждой точке множества Λ_1 вероятность реализации той или иной градации будет зависеть от реализации значений на Λ_0 и может быть определена из системы уравнений (1), если положить $\Omega = \Lambda_0$. Напомним, что для оптимальной передачи (j, k)-й точки изображения следует при кодировании r-го значения выбрать код длиной $-\log P^r_{j,k}$ битов. Тогда математическое ожидание длины кода

$$\overline{l} = H_{j,k} = -\sum_r P^r_{j,k} \log P^r_{j,k}. \tag{2}$$

Таким образом, длина кода для передачи значений изображения на Λ_1 опишется выражением

$$L_1 = \sum_{(j,k)\in\Lambda_1} H_{j,k}(\Lambda_0). \tag{3}$$

Таблица 1

Номер комбинаций	Реализация на Ω	Условия на Ω при определении			
		$P^a_{j,k}$	$P^b_{j,k}$	$P^c_{j,k}$	$P^d_{j,k}$
1	$\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} a & a \\ c & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	
2	$\begin{matrix} a & b \\ c & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	
3	$\begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$		
3	$\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$		
4	$\begin{matrix} a & a \\ b & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$		
5	$\begin{matrix} a & a \\ a & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$			

На следующем этапе передачи для расчета оптимального кода опорное множество будет состоять из $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ и т. д., при этом усилятся корреляционные связи между значениями в точках множества Λ_i со значениями в точках $\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} \Lambda_j$. Энтропия в точках Λ_i будет уменьшаться по мере возрастания i. Дадим оценку энтропии на каждом акте передачи и сравним ее с той, которая получается при кодировании реального изображения. Вообще говоря, для этого пришлось бы решать систему разностных уравнений (1) при реализации значений на опорном множестве $\Omega_i = \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} \Lambda_j$ для всех i, что явно нереально. Поэтому для определения распределения вероятностей реализации значений в точках множества Λ_i ограничимся рассмотрением значений в четырех ближайших опорных точках множества Ω_i, так что задача сводится к решению системы разностных уравнений при различных реализациях на одной из опорных четверок

$$\Omega = \{(-m,\ m),\ (m,\ m),\ (m,\ -m),\ (-m,\ -m)\} \tag{4}$$

или

$$\Omega = \{(0,\ m),\ (m,\ 0),\ (0,\ -m),\ (-m,\ 0)\}. \tag{5}$$

Для решения системы уравнений (1) следует задать значения $P^r_{j,k}$ на Ω. Наблюдаемые значения на опорной четверке обозначим через a, b, c, d; комбинации, которые могут реализоваться, показаны в табл. 1. Сочетания, не попавшие в таблицу, могут быть получены из перечисленных, исходя из соображений симметрии. В этой же таблице показаны значения $P^r_{j,k}$, которые следует задать на опорной четверке, при решении системы уравнений (1). Рассмотрение условий на Ω показывает, что для выполнения задачи достаточно решить уравнение

$$\Delta P_{j,k} - \lambda (P_{j,k} - \hbar) = 0 \tag{6}$$

Таблица 2

Ω	$P_{j,\ k}\ (\Omega)$	$P_{00}\ (\Omega)$
$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$	$(1-\hbar)g^1_{j,\ k}-\hbar\left(g^2_{j,\ k}+g^3_{j,\ k}+g^4_{j,\ k}\right)+\hbar$	$(1-4\hbar)\gamma+\hbar$
$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}$	$(1-\hbar)\ \left(g^1_{j,\ k}+g^2_{j,\ k}\right)-\hbar\left(g^3_{j,\ k}+ +g^4_{j,\ k}\right)+\hbar$	$(2-4\hbar)\gamma+\hbar$
$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$	$(1-\hbar)\ \left(g^1_{j,\ k}+g^3_{j,\ k}\right)-\hbar\left(g^2_{j,\ k}+ +g^4_{j,\ k}\right)+\hbar$	$(2-4\hbar)\gamma+\hbar$
$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}$	$(1-\hbar)\left(g^1_{j,\ k}+g^2_{j,\ k}+g^3_{j,\ k}\right)-\hbar g^4_{j,\ k}+\hbar$	$(3-4\hbar)\gamma+\hbar$
$\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$	$(1-\hbar)\ \left(g^1_{j,\ k}+g^2_{j,\ k}+g^3_{j,\ k}+g^4_{j,\ k}\right)+\hbar$	$(4-4\hbar)\gamma+\hbar$

при пяти комбинациях единиц и нулей на опорной четверке из табл. 2.

Обозначим через $g^i_{j,k}$ решения уравнения

$$\Delta S_{j,\ k}-\lambda S_{j,\ k}=0 \tag{7}$$

при значениях $S_{j,\ k}$ на Ω, соответствующих первой строке табл. 1. Заметим, что $g^i_{j,k}$ могут быть получены из $g^1_{j,k}$ поворотом последнего вокруг начала координат, поэтому все $g^i_{j,k}$ имеют в точке (0, 0) одно и то же значение, которое обозначим через γ. В работе [2] было показано, что решение уравнения (6) для любой реализации на Ω из табл. 2 может быть представлено в виде

$$P_{j,k}=(1-\hbar)\sum_i g^i_{j,k}-\hbar\sum_i g^i_{j,k}+\hbar, \tag{8}$$

где в первой сумме индекс i принимает только те значения, которым соответствуют единицы на Ω, во второй сумме участвуют только $g^i_{j,k}$, которым соответствуют нули на Ω. Все интересующие нас решения показаны в табл. 2, при этом требуется знать только распределение вероятностей реализации градаций в центре квадрата. Решение в этой точке с учетом введенного обозначения приведено в последней графе табл. 2.

Если при передаче значения в каждой точке множества Λ_i действовать оптимально, то средняя длина кода, необходимого для передачи значений на Λ_i, будет равна средней энтропии

$$H_i=\sum_k P_{i,k}H_{i,k}. \tag{9}$$

Здесь $P_{i,\ k}$ — вероятность k-й комбинации значений на опорной четверке (см. табл. 1), а $H_{i,\ k}$ определяется вектором вероятности в середине квадрата, образуемого опорной четверкой. В случае байтового представления числовых значений градаций изображения $\hbar=1/256$, и в выражении для вероятностей (см. табл. 2) ею можно пренебречь. Тогда вероятность реализации r-й градации будет равна

$$P^r=n\gamma \tag{10}$$

для r, наблюдаемых на опорной четверке, а n равно числу значений опорной четверки, совпадающих с r. Вероятность реализации r-й градации, не наблюдаемой на Ω, будет равна

$$P^r=(1-4\gamma)/l \tag{11}$$

согласно первому свойству МИ, где l — число градаций, не реализовавшихся на опорной четверке.

Таким образом, энтропия для всех реализаций на Ω определится следующими выражениями:

$$H_{i,1} = -4\gamma_i \log \gamma_i - (1 - 4\gamma_i) \log (1 - 4\gamma_i)/252, \tag{12}$$

$$H_{i,2} = -2\gamma_i[\log 2\gamma_i + \log \gamma_i] - (1 - 4\gamma_i) \log (1 - 4\gamma_i/253), \tag{13}$$

$$H_{i,3} = -4\gamma_i \log 2\gamma_i - (1 - 4\gamma_i) \log (1 - 4\gamma_i/254), \tag{14}$$

$$H_{i,4} = -3\gamma_i \log 3\gamma_i - \gamma_i \log \gamma_i - (1 - 4\gamma_i) \log (1 - 4\gamma_i/254), \tag{15}$$

Итак, всего закодировано $2^{2k}N$ точек. Определим среднюю плотность кодирования, для этого поделим (17) на $2^{2k}N$:

$$\bar{l} = H_0/2^{2k} + H_1/2^{2k} + H_2/2^{2k-1} + \ldots + H_{2k}/2. \tag{18}$$

Из полученного выражения видно, что первые члены ряда вносят малый вклад в $\bar{l}$, поэтому нет смысла задаваться слишком большим k. В предлагаемом ниже эксперименте $k = 4$, значения на множестве Λ_0 сохранялись в байтовом виде ($H_0 = 8$). При этих условиях выпишем ряд (18) в виде

$$\bar{l} = \frac{1}{32} + \sum_{i=1}^{8} 2^{i-9} H_i. \tag{19}$$

Результаты вычисления γ_i при $\lambda = 1/625$ приведены в табл. 3, там же даны значения энтропии $H_{i,k}$, вычисленные по формулам (12)—(16). Выбор параметра λ определялся полушириной автокорреляционной функции изображения типа «портрет» (связь параметра λ с подкасательной см. в [2], там же показана автокорреляционная функция).

Результаты, приведенные в табл. 3, соответствуют идеальному изображению, т. е. такому изображению, статистика которого описывается системой уравнений (1). При работе с реальными изображениями следует учитывать влияние следующих факторов.

1. Влияние шумов. Во многих случаях можно считать, что шумы на оцифрованном изображении не имеют пространственной корреляции. В этом случае возникают две ошибки, которые частично компенсируют друг друга. Первая ошибка — вероятность несовпадения значения в средней точке ни с одним из значений опорной четверки при условии, что средняя точка принадлежит одной из градаций, реализовавшихся на опорной четверке. Если обозначить условную вероятность несовпадения через $P_{\text{ну}}$, то полная вероятность несовпадения определится выражением

$$P_{\text{н}} = 4\gamma P_{\text{ну}}. \tag{20}$$

Заметим, что в случае некоррелированного шума $P_{\text{ну}}$ не зависит от расстояния до точек опорной четверки. Вторая возможная ошибка — вероятность ложного совпадения при условии, что средняя точка не принадлежит ни одной из градаций, реализовавшихся на опорной четверке, которая может быть записана в виде

$$P_{\text{лс}} = (1 - 4\gamma) P_{\text{лу}}, \tag{21}$$

где $P_{\text{лу}}$ — условная вероятность ложного совпадения. Влиянием $P_{\text{лс}}$ можно пренебречь, поскольку условная вероятность $P_{\text{лу}}$ определится только влиянием градаций, которые по числовым значениям близки к одной из реализовавшихся на опорной четверке, и при небольшом уровне шумов

Таблица 3

i	γ_i	H_{1i}	H_{2i}	$H_{3,i}$	H_{4i}	H_{5i}	H_i
1	0,142	5,582	5,301	5,021	4,913	4,457	5,188
2	0,168	4,873	4,539	4,205	4,079	3,525	4,356
3	0,184	4,418	4,052	3,686	3,548	2,952	3,768
4	0,205	3,756	3,347	2,938	2,738	2,119	2,993
5	0,214	3,455	3,028	2,601	2,439	1,745	2,574
6	0,232	2,803	2,340	1,876	1,698	0,950	1,806
7	0,233	2,764	2,299	1,833	1,658	0,902	1,688
8	0,250	2,000	1,500	1,000	0,810	0,000	0,770

стоянной.

2. В процессе оцифровки измеряется средняя оптическая плотность фотоматериала в квадратах размером $\delta \times \delta$. Если квадрат попадает на границу перехода от участка снимка с одной оптической плотностью a к участку с другой оптической плотностью b, то в зависимости от соотношения, в котором граница делит квадрат с измеряемой оптической плотностью, при оцифровке получится число $c \in [a, b]$. При этом с большей вероятностью $c \neq a \vee b$. Таким образом, возникает промежуточная ступенька.

Пусть на опорной четверке, соответствующей нечетным номерам этапов передачи i и с расстоянием между точками m, реализовались два отличных друг от друга значения a и b. Тогда с вероятностью $4\gamma_i$ можно считать, что обнаружена граница. На небольших участках изображения можно принять границу прямолинейной, которую для определенности будем считать строго горизонтальной (рассмотрение более общего случая вносит небольшие изменения в окончательный результат, но значительно усложняет рассуждения). Тогда относительно опорной четверки она может занять одно из $m+1$ равновероятных положений. Заметим, что в двух из $m+1$ случаев промежуточное значение c реализуется на опорных точках, тогда вероятность реализации «благоприятной» ситуации (когда значения c находятся в середине квадрата) будет равна $(m-1)/$ $/(m+1)$. Только в одном случае из $(m-1)$ «благоприятных» и равновероятных значение реализуется в центре квадрата. Происходит обнаружение ложной градации. Итак, полная вероятность обнаружения ложной градации определяется выражением

$$P_{\text{л}i} = P_{3,4i}4\gamma_i((m-1)/(m+1))(1/(m-1)) = P_{3,4i}(4\gamma_i/(m+1)), \quad (22)$$

где $P_{3,4i}$ — вероятность реализации двух различных значений на опорной четверке. В табл. 4 сведены результаты эксперимента. Частота совпадения значения в центре квадрата с одним из значений на опорной четверке в таблице обозначена $\hat{\gamma}_i$. Частоты, с которыми наблюдались на опорной четверке четыре, три, два и одно значения, обозначены соответственно r_{1i}, r_{2i}, $r_{3,4i}$ и r_{5i}. Для определения H_i в выражении (9) вместо $P_{i,k}$ представлялись соответствующие частоты из табл. 4, результаты счета для предсказанных γ_i приведены в табл. 3. В табл. 4 даны значения $\hat{H}_i$, вычисленные для полученных в результате эксперимента γ_i. Средняя плотность кодирования для идеального изображения, вычисленная из (19), равна 1,431 бит/элемент, для реального изображения —2,541 бит/элемент. Из полученных результатов видно, что длина кода, необходимого для передачи идеального изображения, почти в два раза короче, чем для передачи реального изображения. Для выяснения причины такого удли-

Таблица 4

i	$\hat{\gamma}_i$	r_{1i}	r_{2i}	$r_{3,\,4i}$	r_{5i}	$\tilde{\gamma}_i$	$\hat{H}_i$
1	0,149	0,296	0,333	0,231	0,140	0,151	4,990
2	0,166	0,286	0,303	0,223	0,188	0,169	4,419
3	0,168	0,222	0,296	0,248	0,234	0,173	4,280
4	0,187	0,207	0,281	0,258	0,254	0,195	3,625
5	0,187	0,160	0,265	0,279	0,296	0,197	3,552
6	0,201	0,143	0,251	0,290	0,316	0,216	3,020
7	0,206	0,112	0,221	0,318	0,349	0,228	2,772
8	0,223	0,094	0,182	0,341	0,383	0,254	2,043

нения кода введем поправку на ложные градации в $\hat{\gamma}_i$, при этом заметим, что величина $\hat{\gamma}_i$ существенно влияет на длину кода. Для коррекции $\hat{\gamma}_i$ прибавим к ней $(1/4)P_{лi}$, определенную выражением (22), при этом $P_{3,\,4i}$ заменим на $r_{3,\,4i}$, а γ_i — на $\hat{\gamma}_i$ (ввиду малости различия, что нетрудно видеть при сравнении табл. 3 и 4). Итак, после подстановки получим

$$\tilde{\gamma}_i = \hat{\gamma}_i(1 + r_{3,\,4i}/(m_i + 1)), \tag{23}$$

результаты коррекции статистики приведены в табл. 4. Формула (23) справедлива для нечетных i, для четных i коррекция проводилась по формуле

$$\tilde{\gamma}_i = \hat{\gamma}_i(1 + r_{3,\,4i}\sqrt{2}/(m_i + \sqrt{2})). \tag{24}$$

Сравнение $\tilde{\gamma}_i$ с γ_i показывает их хорошее соответствие друг другу и позволяет сделать следующие выводы.

1. Статистическая модель достаточно хорошо отражает статистику реальных изображений и может быть принята для решения задач кодировки и обработки изображений.

2. Состояние контурной части изображения в большой мере влияет на длину кода, поэтому задача повышения коэффициента сжатия должна решаться параллельно задаче улучшения качества изображения.

В заключение заметим, что полученную среднюю длину 1,431 бит на кодируемый элемент нельзя толковать как нижний теоретический предел. Но обсуждение путей сокращения избыточности изображений выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Старков М. А.** Статистическая модель бинарных изображений.— Автометрия, 1979, № 5.
2. **Старков М. А.** Статистическая модель изображений.— Автометрия, 1981, № 6.

Поступила в редакцию 12 мая 1981 г.

УДК 621.396.962 : 519.217

В. Г. ГАЙСОВ, Ю. Н. ГОРБУНОВ

(Челябинск)

ДВУХЭТАПНАЯ ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Введение. В ряде задач радиолокации и радиоизмерительной техники не требуется получения точных мгновенных отсчетов временных интервалов, поэтому процесс измерения может быть организован не по одному, а по серии (пачке) n импульсов. В том случае, когда изменением