

Таким образом, разработаны алгоритмы, обеспечивающие получение оценок систематических погрешностей, которые повышают точность в 4 раза, т. е. система позволяет проводить измерения координат объектов с точностью $\sim 0,15$ мкм.

Рассмотренный подход может быть использован при проведении метрологических измерений для устройств и систем, аналогичных автомату «Зенит-2», без привлечения высокоточных эталонов и мер, а также при решении задач, требующих повышенной точности измерения координат объектов.

Авторы выражают признательность В. М. Крылову за разработку кодуктора и измерительной кассеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестерихин Ю. Е. и др. Автоматизированный комплекс обработки изображений.— Автометрия, 1980, № 3.
2. Обидин Ю. В., Потаников А. К., Ситников Г. Ф. «СКАН-2» — устройство ввода полугоновой информации в ЭВМ.— Автометрия, 1981, № 6.
3. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 19 ноября 1980 г.

УДК 681.3.058

В. И. РАБИНОВИЧ

(Новосибирск)

АЛГОРИТМЫ ПОРАЗРЯДНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Появление алгоритмов получения и обработки информации, отличающихся от традиционных, открывает, как правило, новые возможности построения измерительно-вычислительных систем. В этой связи привлекают внимание публикации [1, 2], в которых рассматривается вычисление «разряд за разрядом», начиная со старших, двух функций $\mathcal{X}^{1/2}$ и \mathcal{X}^{-1} при вводе в том же порядке разрядных коэффициентов аргумента.

Ниже будет показано, что для широкого класса функций могут быть построены алгоритмы их поразрядного вычисления и измерения; основные свойства этих алгоритмов подробно исследуются.

1. Сохраним обозначения и способ нормализованного представления переменных, принятые в [1, 2]. Тогда $\varphi(\mathcal{X})$ — функция, значения которой требуется вычислить с погрешностью, не превышающей 2^{-n} . Функция $\varphi(\mathcal{X})$ такова, что если $0 \leq \mathcal{X} < 1$, то $0 \leq \varphi(\mathcal{X}) < 1$. Ниже используются аргумент X и переменная Y , которые принимают значения на множестве $\{\sqrt{2^{-n}}\}_{v=0}^{2^n-1}$ и для каждого $i = 1, n$ определяются рекуррентно:

$$X_i = X_{i-1} + x_i 2^{-i}, \quad X_0 = x_0 = 0, \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad (1)$$

$$Y_i = Y_{i-1} + y_i 2^{-i}, \quad Y_0 = y_0 = 0, \quad y_i \in \{0, 1, 2\}. \quad (2)$$

Поразрядным вычислительным алгоритмом (ПВА) назовем алгоритм вычисления $\varphi(X)$, который при поступлении каждого x_i , начиная со старших, формирует $y_i(Y_i)$, удовлетворяющие неравенствам

$$Y_i \leq \eta(X_i) < Y_i + 2^{-i}, \quad (3)$$

где

$$\eta(X_i) = \begin{cases} \varphi(X_i), & \text{если } \varphi(X_i) \geq \varphi(X_{i-1}); \\ 1 - \varphi(X_i), & \text{если } \varphi(X_i) \leq \varphi(X_{i-1}) \end{cases}$$

для всех $i = 1, n$.

С целью выделения класса функций, для которых ПВА существует, примем некоторые ограничения. Пусть $\varphi(X)$ монотонна и имеется D_x — непустая область допустимых значений аргумента, такая, что для всех $i = 1, n$ выполняется условие

$$\Delta\eta(X_{i-1}) = \eta(X_i) - \eta(X_{i-1}) \leq 2^{-i}. \quad (4)$$

Покажем справедливость следующего утверждения 1: если $\varphi(X)$ монотонна, то для $X \in D_x$ построение ПВА возможно.

Доказательство проведем методом математической индукции, полагая для определенности $\varphi(X)$ монотонно возрастающей. Монотонность гарантирует применение только одного из соотношений для $\eta(X_i)$, а уточнение характера монотонности обуславливает выбор нужного. В соответствии с изложенным конкретизируем (3):

$$0 \leq 2^i\{\varphi(X_i) - Y_i\} < 1. \quad (3')$$

При $i = 0$ неравенства (3') выполняются тривиальным образом. При $i = 1$ возможны две ситуации: если $0 \leq \varphi(X_1) < 2^{-1}$, неравенства (3') удовлетворяются при $y_1 = 0$ ($Y_1 = 0$); если же $2^{-1} \leq \varphi(X_1) < 1$, то при $y_1 = 1$ ($Y_1 = 2^{-1}$). Перейдем к индукционному шагу: предположим, что

$$0 \leq 2^{i-1}\{\varphi(X_{i-1}) - Y_{i-1}\} < 1, \quad (5)$$

и докажем, что при вводе x_i найдется такое $y_i \in \{0, 1, 2\}$, при котором будут справедливы неравенства (3'). Относительно (5) отметим два обстоятельства. Во-первых, из (5) следует, что

$$\text{либо} \quad 0 \leq 2^{i-1}\{\varphi(X_{i-1}) - Y_{i-1}\} < 2^{-1}, \quad (5')$$

$$\text{либо} \quad 2^{-1} \leq 2^{i-1}\{\varphi(X_{i-1}) - Y_{i-1}\} < 1; \quad (5'')$$

во-вторых, ввиду (1), (2) и (4)

$$\varphi(X_{i-1}) - Y_{i-1} = \varphi(X_i) - Y_i + y_i 2^{-i} - \Delta\varphi(X_{i-1}). \quad (6)$$

Комбинируя (5'), (5'') и (6), получим две системы неравенств:

$$2^i \Delta\varphi(X_{i-1}) - y_i \leq 2^i\{\varphi(X_i) - Y_i\} < 2^i \Delta\varphi(X_{i-1}) - y_i + 1, \quad (7')$$

$$1 + 2^i \Delta\varphi(X_{i-1}) - y_i \leq 2^i\{\varphi(X_i) - Y_i\} < 2^i \Delta\varphi(X_{i-1}) - y_i + 2. \quad (7'')$$

Присвоим порядковый номер μ ($\mu = \overline{0, 2^i - 1}$) тому из промежутков (5') или (5'') (соответственно (7') или (7'')), которому принадлежит $\varphi(X_{i-1})$. Приращение $\Delta\varphi(X_{i-1})$, вызванное вводом x_i , может в силу условия (4) оставить $\varphi(X_i)$ в том же промежутке или перевести в соседний с номером $\mu + 1$. Обе эти возможности будут учтены, если положить, что $\tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1})$ — оценка $\Delta\varphi(X_{i-1})$ — принимает два значения: 0 и 2^{-i} . Подставляя в (7') и (7'') указанные значения $\tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1})$, можно убедиться, что для любой из четырех ситуаций неравенства (3') выполняются при следующем определении y_i :

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если (7') и } \tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1}) = 0; \\ 1, & \text{если (7') и } \tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1}) = 2^{-i}; \\ 1, & \text{если (7'') и } \tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1}) = 0; \\ 2, & \text{если (7'') и } \tilde{\Delta}\varphi(X_{i-1}) = 2^{-i}. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, достаточность условий, содержащихся в сформулированном выше утверждении 1, доказана. По поводу этого доказательства сделаем два замечания. Первое из них заключается в том, что «инструкция» (8) подсказывает конструктивную процедуру определения y_i . Действительно, вычисленное значение $\varphi(X_i)$ сравнивается с суммой $Y_i^{(0)} = Y_{i-1} + 2^{-i}$. Если $\varphi(X_i) < Y_i^{(0)}$, то $y_i = 0$; если же $\varphi(X_i) \geq Y_i^{(0)}$,

то формируется сумма $Y_i^{(1)} = Y_i^{(0)} + 2^{-i}$ и проводится еще одно сравнение. Если $\varphi(X_i) < Y_i^{(1)}$, то $y_i = 1$, в противном случае $y_i = 2$. Возможна и другая процедура, основанная на использовании $\varphi^{-1}(Y)$ — функции, обратной $\varphi^{-1}(X)$. Если $\varphi(X)$ монотонна, то монотонна и однозначна $\varphi^{-1}(Y)$. Отсюда следует правомерность определения $y_i(Y_i)$, удовлетворяющего неравенствам

$$\varphi^{-1}(Y_i) \leq X_i < \varphi^{-1}(Y_i + 2^{-i}), \quad (3'')$$

которые равносильны неравенствам (3').

Второе замечание касается «сбалансированности» степени избыточности в представлении Y и верхней границы в условии (4). Отказ от избыточности влечет за собой появление «дырок» в области D_x . Действительно, пусть для некоторых X_{i-1} в соответствии с (5) $\varphi(X_{i-1}) = Y_{i-1} + 2^{-i+1} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $\Delta\varphi(X_{i-1}) \geq \varepsilon$ неравенства (3') не удовлетворяются ни одним из значений $y_i \in \{0, 1, 2\}$ и, следовательно, $X_{i-1} \notin D_x$ (качественных изменений не произойдет, если положить верхнюю границу в (4) равной 2^{-i} , $\gamma > 1$). Аналогичным образом можно показать, что оценка 2^{-i} в условии (4) — наибольшая верхняя граница, которая позволяет избежать подобного эффекта при $y_i \in \{0, 1, 2\}$.

2. Условия (4) ограничивают область допустимых значений аргумента. Для расширения D_x можно указать два метода: увеличение избыточности системы счисления в представлении Y и рассмотренное в [1, 2] введение вспомогательных множителей. Первый из этих методов представляет собой некоторое обобщение ПВА. Если увеличить число значений, которые могут принимать разрядные коэффициенты Y ($y_i \in \{0, 1, \dots, p\}$, $p > 2$), то условия (4) смягчаются: $0 \leq \Delta\varphi(X_{i-1}) = \varphi(X_i) - \varphi(X_{i-1}) \leq (p-1)2^{-i}$, так что расширение области D_x очевидно. Целесообразно выбирать $p = 2^\alpha - 1$, где α — целое положительное. Такой выбор p из диапазона $2^{\alpha-1} \leq p < 2^\alpha$ обеспечивает наибольшее расширение D_x при одинаковых ресурсах вычислителя и равных временных затратах по минимаксному критерию.

Введение вспомогательных множителей $0 < c < 1$ предполагает поразрядное вычисление функции $\varphi(X)$ и последующий переход к функции $\varphi(X)$ (этот переход выполняется просто при $c = 2^{-q}$, q — целое положительное).

Приведенные методы расширения области D_x связаны с увеличением времени реализации ПВА. Первый метод требует в общем случае больших временных затрат на один шаг ПВА, но не влияет на общее число его шагов; второй — увеличивает число шагов ПВА при неизменном времени на один шаг.

Условие (4) является весьма жестким. Это объясняется неопределенностью положения $\varphi(X_{i-1})$ относительно границ накрывающего промежутка $[Y_{i-1}, Y_{i-1} + 2^{-i}]$. Если же это положение известно, то условие (4) можно заменить на менее обременительное:

$$\varphi(X_i) - 2^{-i+1} [2^{i-1} \varphi(X_{i-1})] \leq 3 \cdot 2^{-i}, \quad (9)$$

где квадратные скобки означают взятие целой части. Последовательное (по i) применение (9) устанавливает принадлежность X области D_x . В общем случае для монотонной $\varphi(X)$ трудоемкость проверки предложения « $X \in D_x$ » с помощью условий (4) и (9) уменьшается лишь за счет наличия $x_i = 0$ в двоичном представлении X . Существенный выигрыш в трудоемкости может быть получен, если наложить на $\varphi(X)$ дополнительные ограничения. Пусть, например, $\varphi(X)$ выпукла вверх. Обозначим через \bar{X} наименьшее X , удовлетворяющее неравенству

$$\varphi(X + 2^{-n}) - \varphi(X) \leq 2^{-n}. \quad (10)$$

Предположим существование такого $l < n$, что: а) для всех $1 \leq i \leq l-1$ выполняется условие (4) или (9), б) $X_{l-1} < \bar{X} \leq X_l$. Тогда для выделения

D_x достаточно найти X_l . Действительно, в анализируемой ситуации D_x представляет собой промежуток $[X_l, 1)$. При $X \geq X_l$ условия а) и б) обеспечивают выполнение (4) или (9) для $1 \leq i \leq l+1$, а неравенство (10) гарантирует справедливость (4) для $l+1 < i < n$. Если дополнить ограничения на $\varphi(\mathcal{X})$ ее дифференцируемостью, то весьма точной оценкой \mathcal{X} может служить корень уравнений $\varphi'(\mathcal{X}) = 1$.

3. При анализе точности вычисления, которую обеспечивает ПВА, следует различать две ситуации. Во-первых, X является абсолютно точным значением аргумента (именно эта ситуация рассматривается в [1, 2]). Тогда за n шагов ПВА значения $s\varphi(X)$ вычисляются с погрешностью $\varphi \mathcal{X}$, которую гарантирует ПВА в этой ситуации. Ничем не исключается возможность того, что $Y_n \leq \varphi(X_n) < Y_n + 2^{-n}$, $Y_n + 2^{-n} \leq \varphi(X_n + 2^{-n}) < Y_n + 2 \cdot 2^{-n}$. Очевидно, что $\varphi(\mathcal{X})$ может попасть в любой из промежутков $[Y_n, Y_n + 2^{-n})$ или $[Y_n + 2^{-n}, Y_n + 2^{-n+1})$. Поэтому результат ПВА подчиняется неравенствам $Y_n \leq \varphi(\mathcal{X}) < Y_n + 2^{-n+1}$, из которых следует, что погрешность вычислений в анализируемой ситуации удваивается.

4. Если \mathcal{X} — аналоговый сигнал, то реализации ПВА предшествует аналого-цифровое преобразование. Определение значений $\varphi(\mathcal{X})$ по такой схеме базируется на проведении операций сравнения двух типов: сначала \mathcal{X} с X на аналоговом уровне, а затем на цифровом уровне $\varphi(X_i)$ с Y_i или X_i с $\varphi^{-1}(Y)$. Искомый результат может быть получен при непосредственном аналоговом сравнении \mathcal{X} с оценкой $\varphi^{-1}(Y)$. Оказывается, что основанный на этом принципе алгоритм существенно отличается от ПВА и имеет перед ним ряд преимуществ. Предлагаемый алгоритм будем именовать далее поразрядным измерительным алгоритмом (ПИА).

При рассмотрении ПИА предположим не только монотонность (в строгом смысле), но и выпуклость $\varphi(\mathcal{X})$, что позволяет сделать изложение более компактным и наглядным.

ПИА будем понимать как такой алгоритм измерения $\varphi(\mathcal{X})$, который при вводе непрерывной (аналоговой) величины \mathcal{X} для всех $i = 1, n$ формирует, начиная со старших, y_i -разрядные коэффициенты $\varphi(\mathcal{X})$ в соответствии с правилом

$$y_i = \begin{cases} 0 \{1\}, & \text{если } X_i > \mathcal{X}, \\ 1 \{0\}, & \text{если } X_i \leq \mathcal{X}, \end{cases} \quad (11)$$

где $X_i = 2^{-r} [2^r \psi(Y_{i-1} + 2^{-i})] \{2^{-r}\} 2^r \psi(Y_{i-1} + 2^{-i}) [$, $Y_i = Y_{i-1} + y_i 2^{-i}$, $Y_0 = y_0 = 0$,

$$\psi(Y_{i-1} + 2^{-i}) = \begin{cases} 0 \{1\}, & \text{если } Y_{i-1} + 2^{-i} < \check{Y}, \\ \varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i}), & \text{если } \check{Y} \leq Y_{i-1} + 2^{-i} < \hat{Y}, \\ 1 \{0\}, & \text{если } Y_{i-1} + 2^{-i} \geq \hat{Y}, \end{cases} \quad (12)$$

$\check{Y} \geq 0$ и $\hat{Y} \leq 1$ — наименьшее и наибольшее значения Y ; r и n — параметры, выделяющие множества $\{\eta 2^{-r}\}$ и $\{\nu 2^{-n}\}$ ($\eta = 0, 2^r - 1$, $\nu = 0, 2^n - 1$), на которых принимают значения X_i и Y_i соответственно; в фигурных скобках расположены данные, относящиеся к убывающим функциям $\varphi(\mathcal{X})$, вне их — к возрастающим; $[A]$ означает ближайшее целое, не большее A , $|A|$ — не меньшее A .

Для определения класса функций, допускающих применение ПИА, принятые ограничения, регламентирующие характер изменения $\varphi(\mathcal{X})$, не-

достаточны. Ограничения на $\varphi(\mathfrak{X})$ диктуются также требуемой точностью измерения. В этом отношении решающее значение имеет дополнительная погрешность ПИА, обусловленная квантованием (с точностью до 2^{-r}) значений функции $\varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i})$. В самом деле, пусть $\varphi(\mathfrak{X})$ возрастает. Тогда первые $i-1$ шагов ПИА безошибочно локализируют ее значение в промежутке $[Y_{i-1}, Y_{i-1} + 2^{-i})$ и при выполнении i -го шага имеют место неравенства

$$X_i < \mathfrak{X} < \varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i}) < X_{i-1} + 2^{-r}. \quad (13)$$

Из этих неравенств следует, что при отнесении $\varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i})$ к X_i формируется $y_i = 1$ вместо значения $y_i = 0$, которое было бы получено при отсутствии квантования. Анализируемая погрешность неустранима, но может быть уменьшена до допустимых пределов. Исходя из принципа «равных влияний» потребуем, чтобы дополнительная погрешность, как и основная, не превышала 2^{-n} . Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta\varphi(X) = |\varphi(X + 2^{-r}) - \varphi(X)| \leq 2^{-n} \quad (14)$$

или равносильное ему

$$|\varphi^{-1}(Y + 2^{-n}) - \varphi^{-1}(Y)| \geq 2^{-r}. \quad (14')$$

Будем полагать, что $\{X\}$, удовлетворяющие условию (14), являются элементами D_x — области допустимых значений аргумента. Отметим здесь тот факт, что если $\varphi(\mathfrak{X})$ отлична от линейной и D_x совпадает с промежутком $[0, 1)$, то $r > n$.

Сформулируем следующее утверждение 2: если $\varphi(\mathfrak{X})$ монотонна и выпукла, то применение ПИА обеспечивает измерение $\varphi(\mathfrak{X})$ с погрешностью, ограниченной по модулю константой 2^{-n} .

Отметим прежде всего, что монотонность $\varphi(\mathfrak{X})$ делает правомерным переход от неравенств типа (3') к неравенствам типа (3''), и наоборот. В этой связи ПИА можно рассматривать как известный алгоритм локализации точки (значение $\varphi(\mathfrak{X})$) в промежутке $[0, 1)$ с точностью до 2^{-n} с помощью n операций сравнения. Существо дела не изменяется от того, что положение точки ограничено промежутком $[\tilde{Y}, \bar{Y}] \subseteq [0, 1)$ и вместо $\varphi(\mathfrak{X})$ искомой служит «точка» $\varphi(X)$. Отсюда следует возможность применения ПИА и требуемая точность локализации $\varphi(X)$.

Монотонность и выпуклость $\varphi(\mathfrak{X})$ гарантируют связность области D_x . Далее для определенности принимается, что $\varphi(\mathfrak{X})$ возрастает и выпукла вверх. При этом D_x есть промежуток $[X_D, 1)$, где X_D — наименьшее X , удовлетворяющее (14). Для дифференцируемых $\varphi(\mathfrak{X})$ хорошей оценкой сверху X_D является корень уравнения $\varphi'(X) = 2^{r-n}$. Убедимся, что в данных условиях дополнительная погрешность ограничена константой 2^{-n} и имеет знак, противоположный основной погрешности. Действительно, пусть $\varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i}) < \mathfrak{X}$. Тогда неравенства (13) не выполняются, и дополнительная погрешность на i -м шаге не возникает. Напротив, пусть $\varphi^{-1}(Y_{i-1}) \leq \mathfrak{X} < \varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i})$ и, следовательно, либо $Y_{i-1} \leq \varphi(\mathfrak{X}) \leq \varphi(X_i)$, либо

$$\varphi(X_i) < \varphi(\mathfrak{X}) < Y_{i-1} + 2^{-i} < \varphi(X_i + 2^{-r}). \quad (15)$$

Дополнительная погрешность (в соответствии с (13)) проявляется только во втором случае. Из определения X_D и условия $\mathfrak{X} \in D_x$ следует, что $X_i \geq X_D$. Поэтому ввиду (14) $\varphi(X_i + 2^{-r}) - \varphi(X_i) \leq 2^{-n}$ и тем более (см. (15))

$$Y_{i-1} + 2^{-i} - \varphi(\mathfrak{X}) < 2^{-n}. \quad (16)$$

Условимся результатом ПИА считать $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n y_i 2^{-i}$ и использовать индекс «g» при наличии дополнительной погрешности, а индекс «0» при ее отсутствии. В этих обозначениях при $i = n$ из (16) вытекает, что $0 \leq \tilde{Y}_g - \varphi(\mathfrak{X}) < 2^{-n}$, и, следовательно, утверждение 2 справедливо. Пусть те-

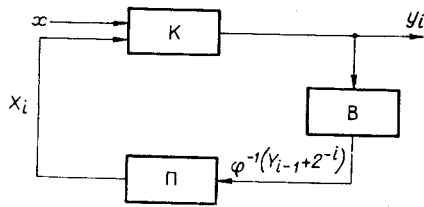


Рис. 1.

перь $1 \leq i < l \leq n$. Тогда в силу (14') $\varphi^{-1}(Y_{l-1} + 2^{-l}) - \varphi^{-1}(Y_{i-1} + 2^{-i}) \geq 2^{-r}$, поэтому $\varphi^{-1}(Y_{l-1} + 2^{-l}) > X_i + 2^{-r} > X$. По правилу (11) из этих неравенств следует, что при $i < l \leq n$ $y_i = 0$ и $Y_{i-1} + 2^{-i} = \bar{Y}_g$. Подстановка \bar{Y}_g в неравенство (16) показывает, что и при $i < l < n$ дополнительная погрешность лежит в допустимых пределах. Из приведенных рассуждений очевидно, что результат ПИА может содержать только одну из обсуждаемых погрешностей: либо основную, либо дополнительную. Поскольку $\bar{Y}_0 \leq \varphi(X) < \bar{Y}_g$ и $\bar{Y}_g - \bar{Y}_0 = 2^{-n}$, то эти погрешности противоположны по знаку. Аналогичная картина имеет место и тогда, когда $\varphi(X)$ — убывающая функция.

5. Аппаратное воплощение ПИА отличается тем (рис. 1), что вычислитель В включен в контур обратной связи между компаратором К и цифроаналоговым преобразователем П. Выходные сигналы y_i компаратора интерпретируются как искомые разрядные коэффициенты двоичного представления $\varphi(X)$. Из y_i формируется внутренняя переменная алгоритма $\mathcal{Y}_i = Y_{i-1} + 2^{-i}$, необходимая для вычисления $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i)$. Двоичный код $X_i = 2^{-r} \lceil 2^r \varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i) \rceil$ из вычислителя поступает на вход цифроаналогового преобразователя. На выходе последнего образуется аналоговый эквивалент X_i , сравнение которого с входным сигналом X происходит в компараторе. Из функциональной схемы (см. рис. 1) следует, что параметр r есть разрядность цифроаналогового преобразователя, а вычислитель должен гарантировать r верных разрядов двоичного представления $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i)$. Отметим одновременно, что в настоящем рассмотрении преобразователь и компаратор предполагаются работающими безошибочно.

Приведенные выше материалы показывают, что ПИА представляет собой обобщение алгоритма поразрядного уравнивания, который является частным случаем ПИА при $\varphi(X) = X$ и $n = r$.

6. Быстродействие системы, реализующей ПИА, зависит от вида функции $\varphi(X)$, точности ее измерения, характеристик блоков К, В, П, входящих в систему (см. рис. 1). Введем необходимые обозначения. Пусть T_f — время получения одного результата ПИА, τ — время переходных процессов в блоках П и К, θ_f — время, затрачиваемое на вычисление $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i)$, f означает φ^{-1} . Еще одно обозначение θ_φ — время вычисления $\varphi(X)$ — понадобится при сопоставлении альтернативных алгоритмов определения $\varphi(X)$.

В простейшем варианте (рис. 2, а) $T_f' = n(\tau + \theta_f)$. Большое быстродействие обеспечивает (при $\theta_f < \tau$) модификация ПИА, которой отвечает временная диаграмма на рис. 2, б. Здесь используется то обстоятельство, что $\mathcal{Y}_i = Y_{i-2} + y_{i-1}2^{-i+1} + 2^{-i}$ может иметь только два значения ($\mathcal{Y}_i^{(0)} = Y_{i-2} + 2^{-i}$ и $\mathcal{Y}_i^{(1)} = Y_{i-2} + 3 \cdot 2^{-i}$), и, следовательно, значения $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i^{(0)})$ и $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i^{(1)})$ могут быть предвычислены на $(i-1)$ -м шаге ПИА. Для этой модификации

$$T_f'' = \begin{cases} (2n-1)\theta_f + \tau & \text{при } 2\theta_f > \tau, \\ \theta_f + n\tau & \text{при } 2\theta_f < \tau. \end{cases}$$

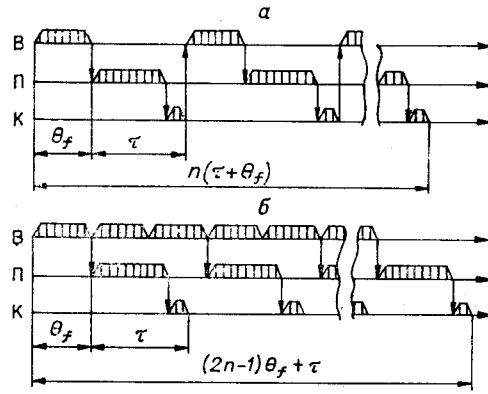


Рис. 2.

$$T_f''' = \begin{cases} n\theta_f + \tau & \text{при } \theta_f > \tau, \\ \theta_f + n\tau & \text{при } \theta_f \leq \tau. \end{cases}$$

Для традиционного алгоритма определения $\varphi(\mathcal{X})$ (получение X как результата цифрового измерения \mathcal{X} и вычисления $\varphi(X)$) необходимое время $T_\varphi = n\tau + \theta_\varphi$. Сопоставление T_φ с T_f при заданном n требует конкретизации $\varphi(\mathcal{X})$ и D_x (для установления значения r) и уточнения параметров θ_f и θ_φ . Последние зависят от того, является ли вычислитель универсальным, узкоспециализированным или реализующим табличное задание функции. Существенное значение при сопоставлении быстродействия (и аппаратных затрат) может иметь то обстоятельство, что в основу конкурирующих алгоритмов положены функции, являющиеся взаимно-обратными. По этой причине разрядности их аргументов и значения функций «перестановочны» (соответственно r и n для традиционного алгоритма и n и r для ПИА).

Рассмотрим ситуацию, когда требуется максимальное быстродействие. Тогда естественно реализовать вычислитель на ПЗУ. В качестве модельной выберем функцию $\mathcal{X}^{1/2}$ и примем $n = 8$, $X_D = 0$. Для функции $\mathcal{X}^{1/2}$ определено, что наименьшее значение $r = 2(n-1)$, так что $r = 14$. Применение ПЗУ позволяет полагать, что $\theta_\varphi = \theta_f$ и $\theta_f < \tau$. Тогда $T_\varphi - T_f''' = 6\tau$, т. е. традиционный алгоритм почти вдвое «медленнее». Оценим объемы памяти, необходимые для реализации сопоставляемых алгоритмов, $V_\varphi = 2^n n = 2^{14} \cdot 2^3 = 2^{17}$, $V_f = 2^n r = 2^3 \cdot 14 = 3584$. Избыточность V_φ обусловлена тем, что для хранения не более чем 2^8 различных слов используется 2^{14} ячеек памяти. Для устранения избыточности необходим преобразователь адресов. Однако сложность последнего и неизбежные временные задержки могут свести на нет эффект от его использования. В анализируемой ситуации V_f характеризует память без избыточности. Удвоения этой памяти, несмотря на обращение к модификации ПИА с одновременным вычислением $\varphi^{-1}(\mathcal{Y}_i)$ для $\mathcal{Y}_i^{(0)}$ и $\mathcal{Y}_i^{(1)}$, не требуется. Это объясняется тем, что по адресам $\mathcal{Y}_i^{(0)}$ и $\mathcal{Y}_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, n}$) можно разделить общий объем памяти на две непересекающиеся части, функционирующие одновременно.

7. Ограничения, принятые при рассмотрении функций, допускающих применение поразрядных алгоритмов, не являются необходимыми. Они выбраны таким образом, чтобы охватить достаточный круг ситуаций, имеющих практическое значение, и в то же время не перегружать изложение. Укажем на некоторые возможности расширения класса функций, значения которых могут быть найдены с помощью обсуждаемых алгоритмов.

Из приведенных выше материалов легко усматривается, что непрерывность и аналитическая форма задания $\varphi(\mathcal{X})$ не представляют собой необходимых условий. Достаточно, чтобы $\varphi(\mathcal{X})$ была определена аналитически или таблично на некотором конечном множестве значений \mathcal{X} . Можно отказаться и от монотонности $\varphi(\mathcal{X})$ на промежутке $[0, 1)$ и даже в области D_x , организовав работу ПВА и ПИА на интервалах монотонности. При этом потребуются дополнительная информация о принадлежности \mathcal{X} к тому или иному интервалу и соответствующие аппаратные затраты. Представляется, однако, что методически более правильно в таких ситуациях говорить о композиции поразрядных алгоритмов в том смысле, который им придан выше. Укажем также и на то обстоятельство, что достаточные условия (4) и (14) не являются необходимыми. Смягчение этих условий может быть использовано для расширения области D_x и уменьшения значений параметра r .

8. На основании изложенного можно выделить основные особенности поразрядных алгоритмов и указать связанные с ними области приложения. Первая особенность — это темп и порядок формирования разрядных коэффициентов двоичного представления $\varphi(X)$. Если результаты измерения $\varphi(X)$ используются в целях управления, то опережающее начало управляющего воздействия может существенно уменьшить время завершения переходных процессов. Заслуживает внимания использование этого свойства при передаче значений $\varphi(X)$ на расстояния (минимизация задержки, выравнивание информационной нагрузки в каналах связи). В частности, представляется перспективным выбор поразрядных алгоритмов в измерительных системах с последовательным интерфейсом.

В качестве второй особенности укажем на «перестановочность» числа разрядов в двоичном представлении аргумента и функции. Это свойство ПИА и ПВА, основанное на вычислении обратной функции, может оказаться средством увеличения скорости обработки данных и сокращения объема оборудования.

Отметим, наконец, что вычислитель, ориентированный на применение поразрядных алгоритмов, может работать с однобитовой шиной ввода данных (и однобитовой выходной шиной при реализации ПВА [1, 2]). Это позволяет уменьшить число контактов микросхем и может быть использовано для увеличения их функциональных, сервисных или эксплуатационных возможностей.

Автор выражает искреннюю благодарность М. П. Цапченко и О. Е. Трофимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жабин В. И. Алгоритм неавтономного вычисления квадратного корня на цифровом устройстве, работающем в реальном масштабе времени.— Автоматика и вычислит. техника, 1977, № 1.
2. Жабин В. И., Корнейчук В. И., Тарасенко В. П. Методы вычисления некоторых функций при поразрядном вводе и выводе информации.— Приборостроение, 1978, № 2.

Поступила в редакцию 15 июня 1981 г.

УДК 681.32.05

О. М. КАРПОВА, М. А. СТАРКОВ

(Новосибирск)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящей работе проводятся исследования по кодированию изображений, выполненные на основании статистической модели изображений [1, 2]. Предполагается, что читатель знаком с указанными публикациями, поэтому введенные там определения и обозначения здесь не разъясняются.

Если исходное изображение задано на k -разрядной матрице размерностью $M \times N$ элементов, и, таким образом, составляет запись длиной $L = M \times N \times k$ бит, то при решении задачи кодирования, как правило, ищется более компактное представление изображений, иначе говоря, решается задача сжатия. Эффективность решения этой задачи существенно зависит от выбора модели изображения, поэтому ниже результаты теоретических расчетов приводятся в сравнении со статистикой реального изображения. Для проведения расчетов принята модель изображений