Первый множитель в этом выражении совпадает с классической базисной функцией (2), так как величина $(1/2)(\Omega_2+\Omega_1)$ является частотой дискретизации, а второй множитель «модулирует» первый с разностной частотой $(1/2)(\Omega_2-\Omega_1)$. Важно отметить, что базисная функция (8) убывает обратно пропорционально квадрату времени и поэтому является более «короткой», чем классическая функция (2). Это свойство позволяет упростить структуру интерполятора.

Предлагаемая модель является оптимальной для аппроксимированного спектра, при этом аппроксимация, как выше предполагалось, является достаточно точной. Поэтому для вычисления среднеквадратической ошибки следует пользоваться формулой (4). После подстановки (5) и (7) в (4), интегрирования и элементарных вычислений окончательно получаем

$$\overline{\sigma^2(t)}/P=(1/3)[F(\Omega_1)(\Omega_2-\Omega_1)/P]=\gamma/3. \qquad (9)$$

Как видно, относительная ошибка составляет 1/3 отношения заштрихованной на рисунке площади к полной площади под функцией $F(\omega)$ и может быть весьма просто определена графическим способом.

Классический способ интерполяции не является оптимальным в среднеквадратическом смысле, если частота дискретизации меньше ширины энергетического спектра сигнала. Как было показано в [4], ошибка в таком случае определяется выражением

$$\frac{\overline{\sigma^2(t)}}{P}=1-\left(\frac{1}{P}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}F(\omega)\,d\omega\right)^2. \qquad (10)$$

При идентичных условиях, т. е. при тех же самых Ω_1, Ω_2 и частоте дискретизации $\Omega=(1/2)\ (\Omega_2+\Omega_1)$, из (10) после несложных вычислений следует

$$\overline{\sigma^2(t)}/P=(1/2)[F(\Omega_1)(\Omega_2-\Omega_1)/P]-(1/16)[F(\Omega_1)(\Omega_2-\Omega_1)/P]^2=\gamma/2-\gamma^2/16. \qquad (11)$$

Поскольку $\gamma<1$, то всегда имеет место неравенство

$$(\gamma/2-\gamma^2/16)-(\gamma/3)>0. \qquad (12)$$

Как видно, предлагаемый способ интерполяции всегда дает меньшую ошибку, чем классический.

Таким образом, в предложенной нами модели интерполяции базисная функция (8), как и классическая, является универсальной и полностью определяется только двумя параметрами Ω_1 и Ω_2, но при достаточно точной аппроксимации энергетического спектра сигнала предлагаемая модель близка к оптимальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Величкин А. И.** Теория дискретной передачи непрерывных сообщений.— М.: Сов. радио, 1970.
2. **Chan D.. Donaldson R. W.** Optimum Pre- and Postfiltering of Sampled Signals with Application to Pulse Modulation and Data Compression Systems.— IEEE Trans. Commun. Technol., 1971, vol. COM-19, p. 141.
3. **Галицкас А. А.** Оптимальное восстановление стационарного случайного процесса по дискретным отсчетам.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиоэлектроника, 1972, т. 15, № 12.
4. **Галицкас А. А.** Ошибка при фильтрации непрерывного сигнала из последовательности его дискретных отсчетов.— В кн.: VIII Всесоюз. симпозиум «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Каунас, 1975. [Тез. докл.] Л.: ВНИИЭлектроизмерительных приборов, 1975, с. 71.

Поступило в редакцию 4 февраля 1980 г.

УДК 535.317 : 535.55

В. В. ТРУБАЕВ

(Ленинград)

МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ ДИФРАКЦИИ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА НА ТРАНСПАРАНТЕ, ПРОСТРАНСТВЕННО МОДУЛИРУЮЩЕМ АМПЛИТУДУ, ФАЗУ И ПОЛЯРИЗАЦИЮ СВЕТА

При рассмотрении дифракции когерентного света на транспаранте обычно считают, что транспарант модулирует только амплитуду и фазу света. Методы решения задач дифракции когерентного света на таких транспарантах в приближении скалярной теории хорошо разработаны [1, 2]. Однако если транспарант обладает двойным лучепреломлением или дихроизмом, зависящими от координат точки на транспаранте, то он будет пространственно модулировать и поляризацию света. Транспарантом, который модулирует амплитуду, фазу и поляризацию света, является, например, линза, у которой под действием какой-либо нагрузки или остаточных напряжений возникает двойное лучепреломление. Поэтому решение задачи о дифракции когерентного света на транспаранте, модулирующем как амплитуду с фазой, так и поляризацию света, связано с оценкой качества изображения, создаваемого оптической системой с двойным лучепреломлением [3].

В настоящей работе приводится решение этой задачи с использованием матричного метода Джонса [4]. Для определенности возьмем дифракцию Фраунгофера.

Рассмотрим сначала случай, когда свет полностью поляризован. Пусть на транспарант, модулирующий амплитуду, фазу и поляризацию света, перпендикулярно плоскости транспаранта падает плоская волна когерентного света. Выберем в плоскости транспаранта декартову систему координат. Следуя методу Джонса [4], представим падающую на транспарант световую волну двухкомпонентной амплитудой

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix},$$

где u_0^1 и u_0^2 — две взаимно-ортогональные компоненты амплитуды волны, не зависящие от координат (x, y) точки на транспаранте. Тогда двухкомпонентная амплитуда волны на выходе транспаранта равна

$$U_T(x, y) = \begin{pmatrix} u_T^1(x, y) \\ u_T^2(x, y) \end{pmatrix} = T(x, y)\, U_0 = \begin{pmatrix} t_{11}(x, y) & t_{12}(x, y) \\ t_{21}(x, y) & t_{22}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}(x, y)\, u_0^1 + t_{12}(x, y)\, u_0^2 \\ t_{21}(x, y)\, u_0^1 + t_{22}(x, y)\, u_0^2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Здесь

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} t_{11}(x, y) & t_{12}(x, y) \\ t_{21}(x, y) & t_{22}(x, y) \end{pmatrix} = A(x, y)\, e^{i\varphi(x,y)} \begin{pmatrix} v_{11}(x, y) & v_{12}(x, y) \\ v_{21}(x, y) & v_{22}(x, y) \end{pmatrix},$$

где $A(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — действительные функции координат (x, y) точки на транспаранте, характеризующие изменение амплитуды и фазы обеих компонент в точке с координатами (x, y) соответственно, а

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} v_{11}(x, y) & v_{12}(x, y) \\ v_{21}(x, y) & v_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

— матрица Джонса [4], описывающая изменение состояния поляризации в точке с координатами (x, y). Так как компоненты $u_T^1(x, y)$, $u_T^2(x, y)$ поляризованы ортогонально, то они будут дифрагировать независимо. Следовательно, чтобы получить двухкомпонентную амплитуду в плоскости, где имеет место дифракция Фраунгофера, надо произвести преобразование Фурье каждой компоненты амплитуды (1) [2]:

$$U_F(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}\{u_T^1(x, y)\} \\ \mathcal{F}\{u_T^2(x, y)\} \end{pmatrix} = \mathcal{F}\left\{T(x, y) \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}\right\}. \qquad (2)$$

Здесь $U_F(u, v)$ — двухкомпонентная амплитуда в точке с координатами (u, v) в плоскости, где имеет место дифракция Фраунгофера, символ $\mathcal{F}\{\ \}$ означает преобразование Фурье. Так как $U_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}$ не зависит от координат (x, y), то (2) можно переписать в виде $U_F(u, v) = \mathcal{F}\{T(x, y)\}U_0$. Для распределения интенсивности в картине дифракции Фраунгофера получим [1]

$$I_F(u, v) = \mathrm{Sp}\, J_F(u, v) = \mathrm{Sp}\left[U_F(u, v)\, U_F^+(u, v)\right] = \mathrm{Sp}\left[\mathcal{F}\{T(x, y)\}\, U_0 U_0^+ \times\right.$$

$$\left.\times \left(\mathcal{F}\{T(x, y)\}\right)^+\right] = \mathrm{Sp}\left[\mathcal{F}\{T(x, y)\}\, J_0 \left(\mathcal{F}\{T(x, y)\}\right)^+\right], \qquad (3)$$

где $J_F(u, v) = U_F(u, v)\} U_F^+(u, v)$ — матрица когерентности [5] в точке (u, v) плоскости дифракции Фраунгофера, $J_0 = U_0 U_0^+$ — матрица когерентности световой волны, падающей на транспарант, знак $+$ означает операцию эрмитового сопряжения. Матрица когерентности J_0 определяет состояние поляризации, падающей на транспарант световой волны. Поэтому можно считать, что распределение интенсивности в картине дифракции Фраунгофера зависит от состояния поляризации падающего на транспарант света.

Если падающая на транспарант световая волна поляризована частично (включая полностью деполяризованный свет), то ее можно представить меняющейся во времени двухкомпонентной амплитудой

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} u_0^1(t) \\ u_0^2(t) \end{pmatrix}.$$

Применяя те же рассуждения, что и выше, определим зависящую от времени двухкомпонентную амплитуду в плоскости дифракции Фраунгофера:

$$U_F(u, v;\ t) = \begin{pmatrix} u_F^1(u, v;\ t) \\ u_F^2(u, v;\ t) \end{pmatrix} = \mathscr{F}\ \{T(x, y)\}\ U_0(t-\tau).$$

Здесь $\tau = l/c$, l — расстояние от плоскости транспаранта до плоскости, где имеет место дифракция Фраунгофера, c — скорость света. Тогда для распределения интенсивности получим

$$I_F(u, v) = \mathrm{Sp}\, J_F(u, v) = \mathrm{Sp}\, \langle U_F(u, v;\ t)\, U_F^+(u, v;\ t)\rangle = \mathrm{Sp}\, \big[\mathscr{F}\ \{T(x, y)\}\times$$
$$\times \langle U_0(t-\tau)\, U_0^+(t-\tau)\rangle\, (\mathscr{F}\ \{T(x, y)\})^+\big], \tag{4}$$

где скобки $\langle\rangle$ означают усреднение по времени. Так как $\langle U_0(t-\tau)\, U_0^+\ (t-\tau)\rangle = \langle U_0(t)\, U_0^+(t)\rangle = J_0$, то (4) можно переписать в виде

$$I_F(u, v) = \mathrm{Sp}\ [\mathscr{F}\{T(x, y)\}J_0\ \ (\mathscr{F}\{T(x, y)\})^+]. \tag{5}$$

Таким образом, и в этом случае распределение интенсивности в картине дифракции Фраунгофера определяется состоянием поляризации падающего на транспарант света.

Если свет полностью деполяризован, то матрица когерентности J_0 имеет вид [1]

$$J_0 = \frac{1}{2} I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(I_0 — интенсивность света). Подставляя (6) в (5), получим распределение интенсивности в картине дифракции Фраунгофера для деполяризованного света:

$$I_F(u, v) = \frac{1}{2} I_0 \mathrm{Sp}[\mathscr{F}\{T(x, y)\}\ \ (\mathscr{F}\{T(x, y)\})^+]/2.$$

Заметим, что если транспарант не изменяет состояния поляризации падающего на него света и лишь модулирует амплитуду и фазу, т. е. его пропускание

$$T(x, y) = A(x, y)\, e^{i\varphi(x,y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то формулы (3), (5) переходят в обычные формулы, получаемые в скалярной теории [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики.— М.: Наука, 1973.
2. **Гудмен Дж.** Введение в фурье-оптику.— М.: Мир, 1970.
3. **Комиссарчук В. А.** Распределение освещенности в изображении точки и передаточная функция при двойном лучепреломлении в элементах оптической системы.— Опт. и спектр., 1970, т. 29, вып. 1.
4. **Шерклифф У.** Поляризованный свет.— М.: Мир, 1965.
5. **Maxia Vera.** Light Polarization Problems.— Appl. Opt., 1976, vol. 15, p. 2576.

Поступило в редакцию 12 марта 1980 г.