

изображений с нормальным, а треугольниками — с равномерным распределением яркости.

Рис. 3 отвечает условиям формулы (8). Корреляционная функция изображения имела вид $\rho(l) = e^{-l/l_0}$, и, следовательно,

$$\psi(\beta) = 2 \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\beta}{\beta_0} \right) e^{-\beta/\beta_0} \right], \quad \beta_0 = l_0 / \sqrt{S/\pi}.$$

На рис. 3 результаты исследования вращений представлены светлыми кружками, результаты размасштабирования — треугольниками, а результаты по сдвигам — черными кружками.

Эксперименты хорошо согласуются с теоретическими выводами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буймов А. Г. Предельная точность экстремального совмещения изображений. Связь с корреляционной структурой.— В кн.: Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: изд. ТГУ, 1977, вып. 2.
2. Буймов А. Г., Решетников М. Т. Случайное поле Пальма.— В кн.: Труды X Всесоюз. школы-семинара по статистической гидроакустике. Киев: изд. КПИ, 1978.
3. Антипин В. В., Буймов А. Г. Быстрая имитация случайных изображений в базисе Адамара.— В кн.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Методы и средства преобразования сигналов». Рига: Зинатне, 1978, т. 1, с. 105.
4. Белоглазов И. Н., Тарасенко В. П. Корреляционно-экстремальные системы.— М.: Сов. радио, 1974.

Поступило в редакцию 10 апреля 1980 г.

УДК 621.394

А. А. ГАЛИЦКАС
(Вильнюс)

МОДЕЛЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ ПО ИХ ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Согласно классической теореме отсчетов, любой сигнал $s(t)$, спектр которого строго ограничен частотой Ω , может быть точно разложен по его выборкам $s(n\Delta)$, взятым через интервалы времени $\Delta = \pi/\Omega$, в ряд

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta) \varphi(t - n\Delta), \quad (1)$$

где

$$\varphi(\tau) = \sin \Omega\tau/\Omega\tau. \quad (2)$$

Спектры реальных сигналов не являются строго ограниченными, тем не менее при решении различных технических задач интервал дискретизации выбирают исходя из условия $\Delta = \pi/\Omega$. При этом принимают такое значение Ω , чтобы мощность, заключенная в интервале $[-\Omega, \Omega]$, составляла большую часть мощности сигнала. Такое разложение представляет исходный сигнал приближенно, с некоторой ошибкой. Поэтому в реальных случаях возникает вопрос об оптимальном в определенном смысле разложении сигнала в ряд (1) с использованием базисных функций, отличных от (2).

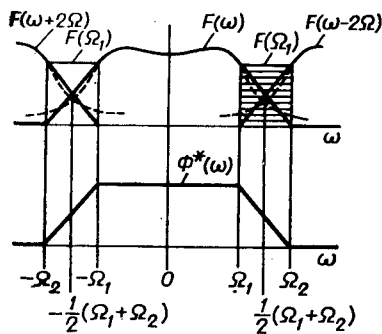
Из теории оптимальной интерполяции известно [1—3], что спектр оптимальной в среднеквадратическом смысле базисной функции при разложении сигнала с нефиinitным энергетическим спектром $F(\omega)$ в ряд (1) задается формулой

$$\Phi^*(\omega) = \Delta F(\omega) \left/ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n\Omega) \right. \quad (3)$$

Среднеквадратическая ошибка при этом имеет значение

$$\overline{\sigma^2(t)} = P - \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\omega) F(\omega) d\omega \quad (4)$$

(P — мощность сигнала) и при данных условиях является минимальной.



аппроксимирован прямой линией, как это проиллюстрировано на рисунке. Таким образом, на боковых участках энергетического спектра $F(\omega)$ выбираются такие интервалы $[-\Omega_2, -\Omega_1]$ и $[\Omega_1, \Omega_2]$, чтобы прямые, проведенные через точки $(-\Omega_2, 0)$, $(-\Omega_1, F(\Omega_1))$ и $(\Omega_1, F(\Omega_1))$, $(\Omega_2, 0)$, хорошо аппроксимировали энергетический спектр на этих участках. В интервале $[-\Omega_1, \Omega_1]$ спектр аппроксимации не подвергается, а вне интервала $[-\Omega_2, \Omega_2]$ принимается равным 0. В качестве меры ошибки при этом можно принять, например, среднеквадратическое отклонение или максимальное абсолютное отклонение. В дальнейшем предполагается, что выбором частот Ω_1 и Ω_2 всегда можно достичь вполне удовлетворительной аппроксимации.

С учетом принятого предположения аппроксимированный энергетический спектр сигнала представляется выражением

$$F_a(\omega) = \begin{cases} \frac{F(\Omega_1)}{\Omega_2 - \Omega_1} (\Omega_2 + \omega), & -\Omega_2 < \omega < -\Omega_1, \\ F(\omega), & -\Omega_1 < \omega < \Omega_1, \\ \frac{F(\Omega_1)}{\Omega_2 - \Omega_1} (\Omega_2 - \omega), & \Omega_1 < \omega < \Omega_2, \\ 0, & |\omega| > \Omega_2. \end{cases} \quad (5)$$

Дальнейшие рассуждения опираются на теорию оптимальной интерполяции, согласно которой спектр оптимальной базисной функции определяется по (3). В данном случае в эту формулу вместо $F(\omega)$ следует поставить выражение (5), при этом частота дискретизации принимается равной среднему значению величин Ω_1 и Ω_2 , т. е. $\Omega = (1/2)(\Omega_1 + \Omega_2)$.

При такой частоте дискретизации фигурирующая в (3) сумма в интересующем нас интервале $[-\Omega_2, \Omega_2]$ находится весьма просто (см. рисунок):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_a(\omega - 2n\Omega) = \begin{cases} F(\Omega_1), & -\Omega_2 < \omega < -\Omega_1, \\ F(\omega), & -\Omega_1 < \omega < \Omega_1, \\ F(\Omega_1), & \Omega_1 < \omega < \Omega_2. \end{cases} \quad (6)$$

Теперь нетрудно построить спектр оптимальной базисной функции. Он получается в результате деления выражения (5) на (6) в каждом интервале $[-\Omega_2, -\Omega_1]$, $[-\Omega_1, \Omega_1]$, $[\Omega_1, \Omega_2]$ в отдельности и имеет вид четной «трапециевидальной» функции (см. рисунок):

$$\Phi^*(\omega) = \begin{cases} \Delta \frac{\Omega_2 + \omega}{\Omega_2 - \Omega_1}, & -\Omega_2 < \omega < -\Omega_1, \\ \Delta, & -\Omega_1 < \omega < \Omega_1, \\ \Delta \frac{\Omega_2 - \omega}{\Omega_2 - \Omega_1}, & \Omega_1 < \omega < \Omega_2, \\ 0, & |\omega| > \Omega_2. \end{cases} \quad (7)$$

Во временной области базисная функция определяется в результате обратного преобразования Фурье спектра (7) и имеет следующий окончательный вид:

$$\Phi^*(\tau) = \left(\frac{\sin \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} \tau}{\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} \tau} \right) \left(\frac{\sin \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \tau}{\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \tau} \right). \quad (8)$$

Первый множитель в этом выражении совпадает с классической базисной функцией (2), так как величина $(1/2)(\Omega_2 + \Omega_1)$ является частотой дискретизации, а второй множитель «модулирует» первый с разностной частотой $(1/2)(\Omega_2 - \Omega_1)$. Важно отметить, что базисная функция (8) убывает обратно пропорционально квадрату времени и поэтому является более «короткой», чем классическая функция (2). Это свойство позволяет упростить структуру интерполятора.

Предлагаемая модель является оптимальной для аппроксимированного спектра, при этом аппроксимация, как выше предполагалось, является достаточно точной. Поэтому для вычисления среднеквадратической ошибки следует пользоваться формулой (4). После подстановки (5) и (7) в (4), интегрирования и элементарных вычислений окончательно получаем

$$\overline{\sigma^2(t)}/P = (1/3) [F(\Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_1)/P] = \gamma/3. \quad (9)$$

Как видно, относительная ошибка составляет $1/3$ отношения заштрихованной на рисунке площади к полной площади под функцией $F(\omega)$ и может быть весьма просто определена графическим способом.

Классический способ интерполяции не является оптимальным в среднеквадратическом смысле, если частота дискретизации меньше ширины энергетического спектра сигнала. Как было показано в [4], ошибка в таком случае определяется выражением

$$\frac{\overline{\sigma^2(t)}}{P} = 1 - \left(\frac{1}{P} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) d\omega \right)^2. \quad (10)$$

При идентичных условиях, т. е. при тех же самых Ω_1 , Ω_2 и частоте дискретизации $\Omega = (1/2)(\Omega_2 + \Omega_1)$, из (10) после несложных вычислений следует

$$\overline{\sigma^2(t)}/P = (1/2) [F(\Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_1)/P] - (1/16) [F(\Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_1)/P]^2 = \gamma/2 - \gamma^2/16. \quad (11)$$

Поскольку $\gamma < 1$, то всегда имеет место неравенство

$$(\gamma/2 - \gamma^2/16) - (\gamma/3) > 0. \quad (12)$$

Как видно, предлагаемый способ интерполяции всегда дает меньшую ошибку, чем классический.

Таким образом, в предложенной нами модели интерполяции базисная функция (8), как и классическая, является универсальной и полностью определяется только двумя параметрами Ω_1 и Ω_2 , но при достаточно точной аппроксимации энергетического спектра сигнала предлагаемая модель близка к оптимальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Величкин А. И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений.— М.: Сов. радио, 1970.
2. Chan D., Donaldson R. W. Optimum Pre- and Postfiltering of Sampled Signals with Application to Pulse Modulation and Data Compression Systems.— IEEE Trans. Commun. Technol., 1971, vol. COM-19, p. 141.
3. Галицкас А. А. Оптимальное восстановление стационарного случайного процесса по дискретным отсчетам.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиоэлектроника, 1972, т. 15, № 12.
4. Галицкас А. А. Ошибка при фильтрации непрерывного сигнала из последовательности его дискретных отсчетов.— В кн.: VIII Всесоюз. симпозиум «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Каунас, 1975. [Тез. докл.] Л.: ВНИИЭлектронизмерительных приборов, 1975, с. 71.

Поступило в редакцию 4 февраля 1980 г.

УДК 535.317 : 535.55

В. В. ТРУБАЕВ
(Ленинград)

МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ ДИФРАКЦИИ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА НА ТРАНСПАРАНТЕ, ПРОСТРАНСТВЕННО МОДУЛИРУЮЩЕМ АМПЛИТУДУ, ФАЗУ И ПОЛЯРИЗАЦИЮ СВЕТА

При рассмотрении дифракции когерентного света на транспаранте обычно считают, что транспарант модулирует только амплитуду и фазу света. Методы решения задач дифракции когерентного света на таких транспарантах в приближении скаляр-