

В. Л. КИПОТЬ
(Казань)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

1. Важным моментом при проектировании систем машинной графики является обоснование требуемой емкости запоминающих устройств и пропускной способности каналов связи, что отражается на общей стоимости системы. Это, в свою очередь, приводит к проблеме выбора метода дискретизации и метода кодирования графических данных таким образом, чтобы искажения, вносимые дискретизацией, не превосходили заданного значения, а объем кодового описания был минимален при условии существования достаточно простых алгоритмов кодирования и декодирования.

Известное место в машинной графике занимает обработка изображений, представляющих собой совокупность тонких линий (кривых) на контрастном фоне. Сложность таких изображений (число линий и их длина) может быть весьма значительной, например, при обработке синоптических карт, а требуемая точность представления — высокой. В этом случае минимизация объема кодового описания при заданной точности представления приводит к существенному снижению стоимости системы. Как правило, система машинной графики ориентирована на работу с известным ансамблем изображений, определяемым целевым назначением системы. Таким образом, на этапе проектирования системы необходима оценка объема кодовых описаний изображений, принадлежащих известному ансамблю, для заданного метода дискретизации и кодирования и заданной погрешности представления. В качестве оценок могут быть использованы статистические характеристики, такие как средний объем и дисперсия. В большинстве случаев получение оценок можно упростить, если перейти к ансамблю кривых, составляющих изображения.

Ограничимся рассмотрением дискретизации кривых путем локального определения точек отсчета [1], которая дает представление кривых в виде последовательности коротких линейных сегментов (дискретных элементов), принадлежащих фиксированному набору, определяемому методом дискретизации. Это представление является естественным для устройств ввода со следящей разверткой [2], устройств вывода типа координатных графопостроителей [3] и широко используется в системах машинной графики [4]. Известно большое число методов дискретизации, относящихся к этому классу [1—4]. Для кодирования последовательности дискретных элементов применимы различные кодирующие схемы, такие как цепочное кодирование, разностные схемы, блоковое кодирование и т. п. Вследствие большого разнообразия методов дискретизации и кодирования получение оценок непосредственной статистической обработкой различных сочетаний кодовых описаний и дискретных моделей на этапе проектирования системы — весьма трудоемкая задача.

Получение оценок объема кодовых описаний значительно упрощается, если известны статистические характеристики ансамбля кривых. Как будет показано ниже, должны быть известны плотность распределения угла наклона касательной (причем в большинстве случаев это распределение может быть принято априори равномерным) и распределение (моменты) длин исходных кривых. В данной работе предлагается метод вычисления оценок объема кодовых описаний по известным статистическим характеристикам ансамбля кривых для заданного метода дискретизации и кодирования и заданной погрешности представления. Для оценки объема кодовых описаний дискретных моделей прежде всего необходимо получить распределение вероятностей появления различных комбинаций

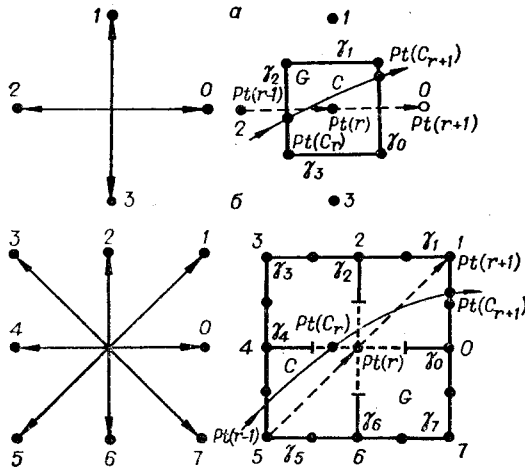


Рис. 1.

вые будем называть *ориентированными*. Процесс дискретизации ориентированной кривой можно представить как некоторую последовательную процедуру генерации точек отсчета, входящих в дискретную модель кривой.

Зафиксируем положение точки отсчета в дискретной модели кривой. Обозначим эту точку $Pt(r)$. В качестве $(r+1)$ -й точки отсчета может быть выбрана одна из k точек, смежных с $Pt(r)$. Обозначим эти точки $Pt_0(r); Pt_1(r) \dots Pt_{k-1}(r)$. Соединяя $Pt(r)$ с точками $Pt_0(r); Pt_1(r) \dots Pt_{k-1}(r)$, получим k векторов, каждый из которых может быть описан парой чисел (α_{m_i}, l_{m_i}) , $i = 0, k-1$, где α_{m_i} — угол между горизонтальной осью и вектором i ; l_{m_i} — длина i -го вектора. Такое представление в соответствии с [2] назовем *шкалой дискретизации*, а сами векторы — *элементами шкалы дискретизации*.

На рис. 1, а показана шкала, состоящая из четырех элементов, все точки отсчета которой располагаются в узлах квадратной решетки; на рис. 1, б — шкала из восьми элементов.

Процедура дискретизации ориентированной кривой определяет для каждой точки кривой, генерирует ли эта точка новую точку отсчета. Обозначим точку кривой, генерирующую r -ю точку отсчета, через $Pt(C_r)$, $r = 1, 2, 3 \dots$. Точки $Pt(C_r)$ разбивают кривую на последовательность дуг. Дугу кривой, заключенную между $Pt(C_{r-1})$ и $Pt(C_r)$, назовем r -й *порождающей дугой кривой* и ее длину обозначим $l_c(r)$.

Рассмотрим множество всех возможных ориентированных кривых, генерирующих точку отсчета $Pt(r)$. Тогда множество точек $\{Pt(C_{r+1})\}$ образует некоторую замкнутую кривую $\gamma(r)$. Замкнутое множество точек плоскости внутри кривой $\gamma(r)$, включая и саму кривую $\gamma(r)$, назовем *областью притяжения точки отсчета* и обозначим $G(r)$.

Выделим из множества точек $\{Pt(C_{r+1})\}$ те, которые генерируют в качестве точки отсчета $Pt(r+1)$ точку, соответствующую i -му элементу шкалы дискретизации. Тогда множество выделенных точек $\{Pt(C_{r+1}^i)\}$ образует кривую $\gamma_i(r) \in \gamma(r)$. Правило выбора i -го элемента шкалы дискретизации можно представить как пересечение (но не касание) ориентированной кривой границы области притяжения $\gamma_i(r)$ при условии, что последняя выбранная точка отсчета — $Pt(r)$.

Для фиксированной точки отсчета $Pt(r)$ существуют k точек, которые могут предшествовать точке $Pt(r)$. Обозначим их $Pt'_0(r); Pt'_1(r) \dots Pt'_{k-1}(r)$. Точка отсчета $Pt'_i(r)$ строится так, чтобы элемент с номером i шкалы дискретизации, построенной в точке $Pt'_i(r)$, соединял точки

дискретных элементов и распределение (моменты) числа элементов в дискретной модели. По этим данным можно оценить удельную энтропию на элемент модели, объем кодовых описаний для различных кодирующих схем и другие параметры дискретных кривых.

Для решения поставленной задачи необходимо дать формальное описание дискретизации кривых, что позволит использовать единый подход к вычислению оценок для различных методов дискретизации.

2. Пусть заданы кривая C и направление движения текущей точки кривой. Такие кривые

$Pt'_j(r)$ и $Pt(r)$. Рассмотрим множество ориентированных кривых, последовательно генерирующих точки отсчета $Pt(r-1) = Pt'_j(r)$ и $Pt(r)$. Тогда множество точек $\{Pt(C_r^j)\}$, порождающих точку отсчета $Pt(r)$, образуют кривую $\gamma'_j(r)$. Кривые $\gamma'_j(r)$ и $\gamma_j(r)$ тождественны с точностью до параллельного переноса. Для однозначности процедуры дискретизации необходимо, чтобы все $\gamma'_j(r)$, $j = \overline{0, k-1}$, лежали в области $G(r)$.

На рис. 1, а показан один шаг дискретизации кривой C методом квадратных окрестностей [4, 5]; $Pt(r)$ — точка отсчета, полученная на r -м шаге дискретизации; $Pt(C_r)$ — точка кривой, породившая точку отсчета $Pt(r)$; $Pt(C_r) \in \gamma'_0(r)$. Центр шкалы дискретизации совмещается с точкой $Pt(r)$, и строится область притяжения $G(r)$ — квадрат со сторонами $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Точка пересечения кривой C с границей области притяжения $Pt(C_{r+1}) \in \gamma_0(r)$, т. е. на этом шаге генерируется элемент шкалы с номером «0». Далее шкала дискретизации переносится в точку $Pt(r+1)$ и рассматривается следующий шаг дискретизации. На рис. 1, б показаны аналогичные построения для метода Фримена [4].

Таким образом, метод локальной дискретизации кривых формально определяется шкалой дискретизации, областью притяжения точки отсчета и разбиением границы области притяжения. Причем эти построения не зависят от того, относительно какой точки отсчета они проводятся.

3. Рассмотрим ансамбль ориентированных кривых, заданных в виде

$$\alpha = \alpha(l); x_0, y_0; l \in (0, L), \alpha \in (0, 2\pi), \quad (1)$$

где α — угол наклона касательной, (x_0, y_0) — координаты начальной точки кривой, L — длина кривой.

В большинстве случаев правомерны следующие допущения. Кривые, принадлежащие ансамблю, имеют ограниченную кривизну: $R(l) \geq R_{\min} \gg \gg \Delta l$, где $R(l)$ — радиус кривизны в точке l . Ансамбль кривых, заданных в виде (1), обладает свойством стационарности. Одномерная плотность распределения угла наклона касательной $f(\alpha)$ не зависит от длины кривой L . Эти допущения позволяют для оценки параметров дискретных моделей рассматривать в окрестности некоторой выделенной точки отсчета случайные прямые, угол наклона которых имеет плотность распределения $f(\alpha)$.

Запишем уравнение прямой на плоскости $E(x, y)$:

$$x \sin \Theta + y \cos \Theta = \rho; \quad \rho > 0, \quad \Theta \in (0, 2\pi). \quad (2)$$

Поскольку (2) описывает неориентированную прямую, то введем параметр I для описания ориентации. Положим $I = 1$ для одной ориентации ($\alpha \in (0, \pi)$) и $I = 2$ — для другой ($\alpha \in (\pi, 2\pi)$).

Рассмотрим множество ориентированных прямых C_g , порождающих некоторую выделенную точку отсчета $Pt(r)$, т. е. пересекающих дуги $\gamma'_j(r)$, $j = \overline{0, k-1}$. Чтобы определить вероятностную меру на множестве прямых C_g , инвариантную к преобразованиям поворота и переноса координат плоскости $E(x, y)$, необходимо перейти к пространству параметров $\Phi(\rho, \Theta, I)$ [6].

В пространстве $\Phi(\rho, \Theta, I)$ множеству прямых C_g будет соответствовать ограниченная область A_g , причем между точками из A_g и прямыми из C_g существует взаимно-однозначное соответствие. Область A_g состоит из двух подобластей: $A_g^{(1)} (I = 1)$ и $A_g^{(2)} (I = 2)$, $A_g^{(1)} \cup A_g^{(2)} = A_g$. Выберем на плоскости $E(x, y)$ систему координат, связанную с точкой отсчета $Pt(r)$. Поскольку $Pt(r) \in G(r)$, то в этом случае $A_g^{(1)}$ и $A_g^{(2)}$ будут, с одной стороны, ограничены прямой $\rho = 0$, с другой — некоторыми граничными кривыми (зависящими от метода дискретизации) $\rho_1(\Theta)$ и $\rho_2(\Theta)$, $\Theta \in (0, 2\pi)$. Требуется найти плотность распределения точек в области A_g . Поскольку $G(r)$ намного меньше поля отображения, то будем полагать,

ления точек в A_g не будет зависеть от ρ . Обозначим $\varphi_1(\rho, \theta)$ плотность точек в $A_g^{(1)}$; $\varphi_2(\rho, \theta)$ плотность точек в $A_g^{(2)}$. Тогда можно показать, что

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \varphi_1(\theta) = \lambda \psi_1(\theta), \quad \varphi_2(\rho, \theta) = \varphi_2(\theta) = \lambda \psi_2(\theta), \quad (3)$$

где λ — нормирующий множитель из условия

$$\lambda \int_0^{2\pi} \{\rho_1(\theta) \psi_1(\theta) + \rho_2(\theta) \psi_2(\theta)\} d\theta = 1. \quad (4)$$

Функции $\psi_1(\theta)$ и $\psi_2(\theta)$ строятся по заданной функции плотности $f(\alpha)$ следующим образом:

$$\psi_1(\theta) = \begin{cases} f(\theta + \pi/2) & \text{при } \theta \in (0, \pi/2), \\ f(\theta - \pi/2) & \text{при } \theta \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ f(\theta - 3\pi/2) & \text{при } \theta \in (3\pi/2, 2\pi); \end{cases}$$

$$\psi_2(\theta) = \begin{cases} f(\theta + 3\pi/2) & \text{при } \theta \in (0, \pi/2), \\ f(\theta + \pi/2) & \text{при } \theta \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ f(\theta - \pi/2) & \text{при } \theta \in (3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве примера построение области A_g и функции плотности для метода квадратных окрестностей. Множество ориентированных прямых, порождающих точку отсчета $Pt(r)$, включает все прямые, проходящие через квадрат со стороной T_s (рис. 2, а). $A_g^{(1)}$ и $A_g^{(2)}$ будут ограничены кривой

$$\rho_1(\theta) = \rho_2(\theta) = \rho_b(\theta) = (T_s/2) |\sin \theta + \cos \theta|. \quad (5)$$

Из (3) следует, что для равномерного распределения угла наклона касательной ($f(\alpha) = 1/2\pi$) плотность распределения точек в A_g равна

$$\varphi_1(\theta) = \varphi_2(\theta) = \lambda/2\pi. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим $\lambda = \pi/4T_s$ или окончательно

$$\varphi_1(\theta) = \varphi_2(\theta) = 1/8T_s. \quad (7)$$

4. Для вычисления вероятности $P(i)$ появления в дискретной модели элемента шкалы дискретизации с номером i рассмотрим подмножество ориентированных прямых из C_g , пересекающих дугу $\gamma_i(r)$ после пересечения любой из дуг $\gamma_j(r)$, $j = 0, k-1$. Эти прямые будут генерировать элемент шкалы с номером i . Так как прямые и точки параметрического пространства находятся во взаимно-однозначном соответствии,

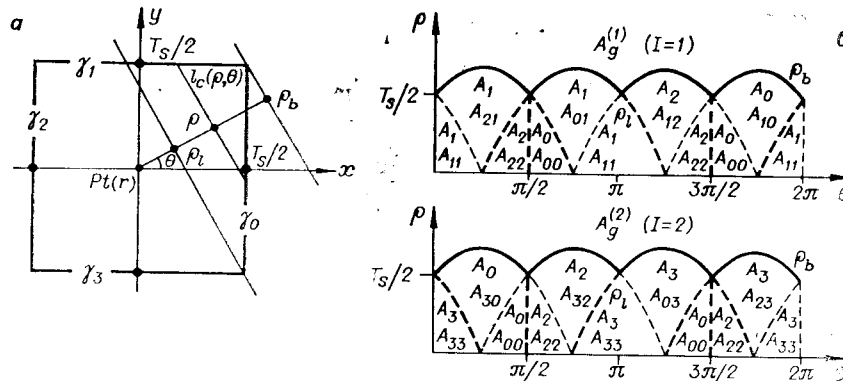


Рис. 2.

то подмножеству прямых, пересекающих дугу $\gamma_i(r)$, в параметрическом пространстве будут соответствовать подобласти $A_i^{(1)}(\rho, \Theta)$ и $A_i^{(2)}(\rho, \Theta)$ (для ориентаций $I = 1, I = 2$). Вероятность появления элемента с номером i определяется интегрированием функции плотности распределения точек в A_g (3) по областям $A_i^{(1)}(\rho, \Theta), A_i^{(2)}(\rho, \Theta)$:

$$P(i) = \int_{A_i^{(1)}} \varphi_1(\Theta) d\rho d\Theta + \int_{A_i^{(2)}} \varphi_2(\Theta) d\rho d\Theta. \quad (8)$$

На рис. 2, б показано разбиение областей $A_g^{(1)}$ и $A_g^{(2)}$ для метода квадратных окрестностей. Линия $\rho_i(\Theta)$ имеет уравнение $\rho_i(\Theta) = (T_s/2) \times |\cos \Theta - \sin \Theta|$.

Интегрирование по формуле (8) для метода квадратных окрестностей и для равномерного распределения угла наклона (7) дает $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0,25$.

Для вычисления вероятности $P(ij)$ появления в дискретной модели пары элементов — первого с номером i , второго с номером j — рассмотрим подмножество ориентированных прямых из C_g , пересекающих дуги $\gamma_i(r)$ и $\gamma_j(r)$. Точки в параметрическом пространстве, соответствующие этим прямым, образуют подобласти $A_{ij}^{(1)}(\rho, \Theta) \in A_g^{(1)}$ и $A_{ij}^{(2)}(\rho, \Theta) \in A_g^{(2)}$. Интегрируя функцию плотности (3) по этим подобластям, получим значение вероятности пары элементов.

Для нахождения вероятности появления комбинации из трех элементов с номерами i, j, s рассматривается подмножество прямых из C_g , пересекающих последовательно $\gamma_i(r), \gamma_j(r)$ и $\gamma_s(r+1)$. Таким образом, можно вычислять вероятности комбинаций из любого числа элементов. Ограничением здесь является то, что при увеличении числа элементов в комбинации увеличивается окрестность точки отсчета, в которой кривые заменяются прямыми линиями, и за счет этого увеличиваются погрешности, вносимые такой заменой.

На рис. 2, б показано разбиение областей $A_g^{(1)}$ и $A_g^{(2)}$ на $A_{ij}^{(1)}$ и $A_{ij}^{(2)}$ для метода квадратных окрестностей. Интегрирование для равномерного распределения угла наклона (7) дает следующие значения вероятностей:

$$\begin{aligned} P(00) &= P(11) = P(22) = P(33) = 0,1035, \\ P(01) &= P(10) = P(12) = P(21) = P(23) = P(32) = P(30) = \\ &= P(03) = 0,0732, \\ P(02) &= P(20) = P(13) = P(31) = 0. \end{aligned}$$

Для оценки распределения (моментов) числа элементов, входящих в дискретную модель, требуется получить распределение длин порождающих дуг кривой — l_c . Например, математическое ожидание числа дискретных элементов для кривой длиной L определяется отношением

$$m(N) \approx m(L)/m(l_c). \quad (9)$$

Для случая приближения прямыми l_c есть длина отрезка прямой, заключенного между дугами $\gamma_i(r)$ и $\gamma_j(r)$. Несложно получить зависимость l_c от параметров ρ, Θ, I и по известной плотности распределения точек в области A_g плотность распределения l_c . Например, для метода квадратных окрестностей зависимости $l_{c1}(\rho, \Theta)$ при $I = 1$ и $l_{c2}(\rho, \Theta)$ при $I = 2$ имеют вид (см. рис. 2, а)

$$l_{c1} = l_{c2} = T_s / \max(|\sin \Theta|, |\cos \Theta|) \text{ при } 0 \leq \rho \leq \rho_i, \quad (10)$$

$$l_{c1} = l_{c2} = (T_s |\sin \Theta + \cos \Theta| - 2\rho) / 2|\sin \Theta \cos \Theta| \text{ при } \rho_i \leq \rho \leq \rho_b.$$

Математическое ожидание l_c равно

$$m(l_c) = \int_{A_g^{(1)}} l_{c1}(\rho, \Theta) \varphi_1(\Theta) d\rho d\Theta + \int_{A_g^{(2)}} l_{c2}(\rho, \Theta) \varphi_2(\Theta) d\rho d\Theta. \quad (11)$$

k $m(l_c)$ $m(l_m)$	$m(N)$	$m(L_m)$	$m(V_1)$ $m(V_2)$ (бит)	h_0 h_1 h_2 (бит/эл.) ...
Метод квадратных окрестностей				
$k=4$ $0,78T_s$ T_s	$1,27 \frac{m(L)}{T_s}$	$1,27m(L)$	$2,55 \frac{m(L)}{T_s}$ $2,02 \frac{m(L)}{T_s}$	2,0 2,0 1,564 1,406 0,863
Метод Фримена				
$k=8$ $1,11T_s$ $1,17T_s$	$0,9 \frac{m(L)}{T_s}$	$1,05m(L)$	$2,7 \frac{m(L)}{T_s}$ $1,35 \frac{m(L)}{T_s}$	3,0 2,979 1,504
Метод оценки косоугольных проекций				
$k=8$ $1,11T_s$ $1,17T_s$	$0,9 \frac{m(L)}{T_s}$	$1,05m(L)$	$2,7 \frac{m(L)}{T_s}$ $1,35 \frac{m(L)}{T_s}$	3,0 2,979 1,504
Метод пересечения контрольного образца				
$k=16$ $2,2T_s$ $2,25T_s$	$0,45 \frac{m(L)}{T_s}$	$1,02m(L)$	$1,81 \frac{m(L)}{T_s}$ $0,68 \frac{m(L)}{T_s}$	4,0 3,96 1,50

Подставляя (10) и (7) в (11), получаем для метода квадратных окрестностей

$$m(l_c) = \pi T_s / 4 \approx 0,785T_s, \quad m(N) \approx 1,273m(L)/T_s.$$

5. Распределения вероятностей появления комбинаций элементов шкалы дискретизации позволяют оценить удельную энтропию [7] на элемент модели. Так, для метода квадратных окрестностей и равномерного распределения угла наклона касательной четвертое приближение удельной энтропии $h_4 = 0,863$ бит/эл. В свою очередь, значение удельной энтропии является нижней границей среднего объема кодового описания $m(v)$ для любых методов кодирования. Пусть некоторый метод кодирования описывает элемент шкалы дискретизации с номером i двоичным кодом длиной v_i двоичных разрядов, тогда $m(v) = \sum_{i=0}^{k-1} P(i) v_i$. Например, для метода квадратных окрестностей равномерное кодирование номеров элементов шкалы дискретизации (цепочный код [4]) требует 2 бит/эл., кодирование с предсказанием [8] — в среднем 1,59 бит/эл. Математическое ожидание объема кодового описания кривой равно $m(V) = m(v)m(N) \approx m(v)m(L)/m(l_c)$. Для метода квадратных окрестностей и цепочного кодирования получаем $m(V_1) \approx 2,546m(L)/T_s$ (бит), для кодирования с предсказанием $m(V_2) \approx 2,02m(L)/T_s$ (бит). T_s в данном случае можно рассматривать как погрешность представления.

Одним из видов ошибок, вносимых дискретизацией, является искажение длины кривой. В среднем порождающая дуга кривой длиной $m(l_c)$ в процессе дискретизации заменяется элементом шкалы длиной $m(l_m) = \sum_{i=0}^{k-1} P(i) l_{m_i}$.

Математическое ожидание длины линии модели равно $m(L_m) = m(l_m)m(N) \approx m(L)m(l_m)/m(l_c)$. Так, для метода квадратных окрестностей при равномерном распределении угла наклона касательной $m(L_m) \approx 1.273m(L)$.

В таблице приведены рассчитанные средние значения для четырех методов дискретизации: метода квадратных окрестностей, метода Фримена [4], метода оценки косоугольных проекций [1] со шкалой из восьми элементов и метода пересечения контрольного образца [9] со шкалой из шестнадцати элементов. В последнем случае область притяжения представляет собой квадрат со стороной $4T_s$. Для всех методов точки отсчета размещаются в узлах квадратной решетки. Расчет проводился для случая равномерного распределения угла наклона касательной.

Рассмотренный метод позволяет оценить не только средние значения, но и другие вероятностные характеристики дискретных моделей и кодовых описаний, например распределения вероятностей, дисперсии и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кипоть В. Л. Дискретизация плоских кривых. [Реф. опубл. в библиогр. указателе ВИНТИ «Депонированные рукописи», 1978, № 7, б. о. № 89]. Рукопись деп. в ВИНТИ 9.01.78, № 118.
2. Поляков В. Г., Переверзев-Орлов В. С. Электронные системы следящей развертки.— М.: Энергия, 1968.
3. Басов Е. П., Абрамов В. Н. Графические регистрирующие устройства ЕС ЭВМ.— М.: Статистика, 1977.
4. Freeman H. Computer Processing of Line-Drawing Image.— Computing Surveys, 1974, vol. 6, N 1.
5. Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений.— М.: Мир, 1972.
6. Кенделл М., Моран П. Геометрические вероятности.— М.: Наука, 1972.
7. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.— М.: Наука, 1973.
8. Поляков В. Г. Естественная дискретная модель рисунка, некоторые асимптотические ее свойства и предсказание хода следящей развертки.— ПИИ, 1970, т. 6, № 3.
9. Miermont J. M. Etude Algébrique et Programmation de la Discretisation de Figures Plane.— In: Thèse le grade de docteur de troisième cycle informatique. Grenoble: USM, 1971.

*Поступила в редакцию 15 сентября 1978 г.;
окончательный вариант — 3 декабря 1979 г.*

УДК 681.786-52 : 62.426

В. К. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. Н. БИЕНКО, В. Н. ИЛЬИН

(Минск)

ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ КОНТРОЛЯ И АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ МИКРООБЪЕКТОВ

В ряде отраслей точного приборостроения (электронная, радиотехническая, электротехническая, часовая и др.) необходимы автоматизированные измерительно-информационные системы (ИИС) для производственного контроля и автоматизации точностных исследований протяженных микрообъектов, таких как микропровода, микроспираль, нити, часовые