УДК 535.317.1 : 535.55

В. В. ТРУБАЕВ

(Ленинград)

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ФОРМАЛИЗМА К ЧАСТОТНОМУ АНАЛИЗУ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ДВОЙНЫМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕМ

При прохождении световой волны через оптические системы наряду с фазовыми могут быть поляризационные искажения волнового фронта, обусловливаемые двойным лучепреломлением, возникающим под действием каких-либо нагрузок или остаточных напряжений. Влияние двойного лучепреломления на оптическую передаточную функцию и функцию рассеяния точки исследовалось в [1].

В настоящей работе для частотного анализа оптических систем с двойным лучепреломлением используется матричный метод Джонса [2], применение которого позволяет записать соотношения между когерентной передаточной функцией, оптической передаточной функцией и функцией рассеяния точки в стандартной форме. При этом функции заменяются соответствующими им матрицами, операция комплексного сопряжения — операцией эрмитового сопряжения для матриц, а произведения функций — соответствующими матричными произведениями.

1. Матрица импульсного отклика. Используя представление Джонса [2], оптический сигнал можно записать в виде двухкомпонентной амплитуды:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f^1(x, y) \\ f^2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Здесь $f^1(x, y)$, $f^2(x, y)$ — ортогонально-поляризованные компоненты световой волны. Прежде всего обобщим понятие импульсного отклика для оптических систем, пространственно модулирующих поляризацию света. Пусть действие оптической системы описывается линейным оператором $\mathscr{L}$, который показывает, как нужно подействовать на двухкомпонентный оптический сигнал на входе системы $F_1(x_1, y_1)$, чтобы получить такой же сигнал на выходе $F_2(x_2, y_2)$:

$$F_2(x_2, y_2) = \mathscr{L}\{F_1(x_1, y_1)\}. \tag{1}$$

Учитывая фильтрующее свойство δ-функции [3], можно записать:

$$F_1(x_1, y_1) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\, F_1(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и используя линейность оператора $\mathscr{L}$, получим

$$F_2(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} f_2^1(x_2, y_2) \\ f_2^2(x_2, y_2) \end{pmatrix} = \mathscr{L}\left\{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - \xi, \quad y_1 - \eta)\, F_1(\xi, \quad \eta)\, d\xi d\eta\right\} =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f_1^1(\xi, \eta)\, \mathscr{L}\left\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + f_1^2(\xi, \eta)\, \mathscr{L}\left\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right] d\xi d\eta = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} h_1^1(x_2, y_2; \xi, \eta) & h_2^1(x_2, y_2; \xi, \eta) \\ h_1^2(x_2, y_2; \xi, \eta) & h_2^2(x_2, y_2; \xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^1(\xi, \eta) \\ f_1^2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\xi d\eta, \tag{3}$$

где

$$\begin{pmatrix} h_1^1(x_2, y_2; \xi, \eta) \\ h_1^2(x_2, y_2; \xi, \eta) \end{pmatrix} = \mathscr{L}\left\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix} h_2^1(x_2, y_2; \xi, \eta) \\ h_2^2(x_2, y_2; \xi, \eta) \end{pmatrix} = \mathscr{L}\left\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Матрицу

$$H(x_2, y_2; \xi, \eta) = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{pmatrix}$$

назовем матрицей импульсного отклика. Элементы матрицы H имеют следующий физический смысл: h_1^1, h_1^2, h_2^1, h_2^2—амплитуды x-, y-компонент импульсного отклика на выходе системы на сигнал типа δ-функции в точке с координатами (ξ, η), имеющий на входе поляризацию

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

соответственно.

Ниже будут рассматриваться только изопланарные оптические системы. Это означает, что

$$H(x_2, y_2; \xi, \eta) = H(x_2-\xi, y_2-\eta).$$

Для изопланарных систем соотношение (3) можно записать в форме

$$F_2(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} h_1^1 * f_1^1 + h_2^1 * f_1^2 \\ h_1^2 * f_1^1 + h_2^2 * f_1^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(здесь $*$ — операция свертки функций). Проводя преобразование Фурье правой и левой частей соотношения (4) и применяя теорему о преобразовании свертки [3], получим

$$\mathscr{F}\{F_2\} = \mathscr{F}\{H\}\mathscr{F}\{F_1\}. \tag{5}$$

Интеграл (4) символически можно записать в виде свертки матрицы импульсного отклика H с двухкомпонентным сигналом на входе системы F_1: $F_2 = H * F_1$. По аналогии с однокомпонентными оптическими сигналами матрицу $\mathscr{F}\{H\}$ будем называть передаточной функцией системы.

2. **Оптическая передаточная функция и ее связь с когерентной передаточной функцией.** Рассмотрим линейную изопланарную оптическую систему, формирующую изображение. Как следует из результатов предыдущего пункта, двухкомпонентную амплитуду в плоскости изображения можно представить интегралом

$$U_i(x_i, y_i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int H(x_i - x_0, y_i - y_0)\, U_0(x_0, y_0)dx_0dy_0, \tag{6}$$

где

$$U_i(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} u_i^1(x_i, y_i) \\ u_i^2(x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

— двухкомпонентная амплитуда в точке (x_i, y_i) плоскости изображения,

$$U_0(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_0^1(x_0, y_0) \\ u_0^2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

— двухкомпонентная амплитуда в точке (x_0, y_0) предметной плоскости, $H(x_i-x_0, y_i-y_0)$ — матрица импульсного отклика, определенная в предыдущем пункте. Следуя обозначениям Гудмена [3], равенство (6) можно записать в виде

$$U_i(x_i, y_i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \widetilde{H}(x_i - \widetilde{x}_0, y_i - \widetilde{y}_0)\, U_g(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)d\widetilde{x}_0d\widetilde{y}_0. \tag{7}$$

Здесь $\tilde{x}_0 = Mx_0$, $\tilde{y}_0 = My_0$,

$$U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = k(\lambda^2 d_i^2/M^2)\, U_0(\tilde{x}_0/M, \tilde{y}_0/M)$$

— идеальное изображение в приближении геометрической оптики,

$$\widetilde{H}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = (1/k\lambda^2 d_i^2)\, H(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0),$$

$M = d_i/d_0$ — увеличение системы, k — комплексное число, λ — длина волны, f — фокусное расстояние, d_i и d_0 определяются формулой линзы $(1/d_0 + 1/d_i = 1/f)$.

Из предыдущего пункта вытекает, что частотные спектры двухкомпонентных амплитуд в предметной плоскости и плоскости изображения связаны соотношением

$$G_i(f_x, f_y) = \mathscr{H}(f_x, f_y) G_g(f_x, f_y), \tag{8}$$

где

$$G_i(f_x, f_y) = \mathscr{F}\{U_i(x_i, y_i)\} = \begin{pmatrix} \mathscr{F}\{u_i^1\} \\ \mathscr{F}\{u_i^2\} \end{pmatrix}$$

— фурье-образ двухкомпонентной амплитуды в плоскости изображения,

$$G_g(f_x, y_y) = \mathscr{F}\{U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\} = \begin{pmatrix} \mathscr{F}\{u_g^1\} \\ \mathscr{F}\{u_g^2\} \end{pmatrix}$$

— фурье-образ двухкомпонентной амплитуды в предметной плоскости

$$\mathscr{H}(f_x, y_y) = \mathscr{F}\{\widetilde{H}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)\} = \begin{pmatrix} \mathscr{F}\{h_1^1\} & \mathscr{F}\{h_2^1\} \\ \mathscr{F}\{h_1^2\} & \mathscr{F}\{h_2^2\} \end{pmatrix}$$

— фурье-образ матрицы импульсного отклика. Матрицу $\mathscr{H}(f_x, f_y)$ будем называть когерентной передаточной функцией.

Интенсивность в плоскости изображения равна [4]

$$I_i(x_i, y_i) = \operatorname{Sp} J_i(x_i, y_i) = \operatorname{Sp}\langle U_i(x_i, y_i; t)\, U_i^+(x_i, y_i; t)\rangle. \tag{9}$$

Здесь

$$J_i(x_i, y_i) = \langle U_i(x_i, y_i; t)\, U_i^+(x_i, y_i; t)\rangle$$

— матрица когерентности в плоскости изображения [5], угловые скобки $\langle\ \rangle$ — усреднение по времени, знак $+$ — операция эрмитового сопряжения. Чтобы определить интенсивность в плоскости изображения, подставим (7) в (9); изменяя порядок интегрирования и используя линейность операции Sp, получим

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int d\tilde{\tilde{x}}_0 d\tilde{\tilde{y}}_0 \operatorname{Sp}[\widetilde{H}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)\times$$

$$\times \langle U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)\, U_g^+(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0; t)\rangle \widetilde{H}^+(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)]. \tag{10}$$

Если освещение предмета абсолютно некогерентно, то аналогично тому, как это делается в работе [3], можно записать:

$$\langle U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)\, U_g^+(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0; t)\rangle = \varkappa \langle U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)\; U_g^+(\tilde{x}_0, \quad \tilde{y}_0; t)\rangle \times$$

$$\times \delta(\tilde{x}_0 - \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{y}_0 - \tilde{\tilde{y}}_0) = \varkappa J_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\, \delta(\tilde{x}_0 - \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{y}_0 - \tilde{\tilde{y}}_0), \tag{11}$$

где $J_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ — матрица когерентности световой волны в точке $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ предметной плоскости, $\varkappa$ — действительная постоянная. С учетом (11) равенство (10) приводится к виду

$$I_i(x_i, y_i) = \varkappa \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \operatorname{Sp}[\widetilde{H}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)\, J_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\times$$

$$\times \widetilde{H}^+(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)]\, d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \tag{12}$$

Допустим, что освещение предмета абсолютно не поляризовано. Тогда матрица когерентности в предметной плоскости равна

$$J_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \frac{1}{2} I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ — интенсивность в предметной плоскости. Подставляя (13) в (12) и используя линейность шпура, получим

$$I_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \int\int_{-\infty}^{+\infty} I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \operatorname{Sp}[\tilde{H}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) \times \times \tilde{H}^+(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)] d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \tag{14}$$

Определим нормированные частотные спектры распределений интенсивностей:

$$Q_g(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\}}{\mathcal{F}\{I_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\}\,|_{f_x=0,\ f_y=0}}, \tag{15}$$

$$Q_i(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{I_i(x_i, y_i)\}}{\mathcal{F}\{I_i(x_i, y_i)\}\,|_{f_x=0,\ f_y=0}}. \tag{16}$$

Тогда применение теоремы свертки [3] к интегралу (14) приводит к следующему соотношению в частотной области:

$$Q_i(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{\operatorname{Sp}[\tilde{H}(x_i, y_i)\tilde{H}^+(x_i, y_i)]\}}{\mathcal{F}\{\operatorname{Sp}[\tilde{H}(x_i, y_i)\tilde{H}^+(x_i, y_i)]\}\,|_{f_x=0,\ f_y=0}} Q_g(f_x, f_y).$$

Следовательно,

$$D(f_x, f_y) = \frac{\mathcal{F}\{\operatorname{Sp}[\tilde{H}(x_i, y_i)\tilde{H}^+(x_i, y_i)]\}}{\mathcal{F}\{\operatorname{Sp}[\tilde{H}(x_i, y_i)\tilde{H}^+(x_i, y_i)]\}\,|_{f_x=0,\ f_y=0}} \tag{17}$$

является оптической передаточной функцией, и можно записать:

$$Q_i(f_x, f_y) = D(f_x, f_y) Q_g(f_x, f_y).$$

Применяя теорему автокорреляции [3], получим соотношение, связывающее когерентную и оптическую передаточные функции:

$$D(f_x, f_y) = \frac{\int\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Sp}[H(\xi - f_x/2, \eta - f_y/2)\mathscr{H}^+(\xi + f_x/2, \eta + f_y/2)]\, d\xi d\eta}{\int\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Sp}[H(\xi, \eta)\mathscr{H}^+(\xi, \eta)]\, d\xi d\eta}. \tag{18}$$

3. **Когерентная и оптическая передаточные функции при наличии фазовых и поляризационных искажений волнового фронта.** Соотношения, полученные в пп. 1 и 2, справедливы независимо от наличия фазовых и поляризационных искажений. Теперь свяжем когерентную и оптическую передаточные функции непосредственно с физическими свойствами оптической системы, обладающей аберрациями. При этом под аберрациями будем понимать не только фазовые, но и поляризационные искажения волнового фронта, которые назовем обобщенными аберрациями. При наличии только фазовых искажений можно считать, что выходной зрачок освещается идеальной сферической волной, но в пределах зрачка находится фазовая пластинка, деформирующая по фазе выходящий из зрачка волновой фронт [3]; в случае поляризационных искажений можно представить, что в пределах зрачка находится двулучепреломляющая пластинка, изменяющая состояние поляризации, которую можно описать матрицей Джонса [2]:

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} v_{11}(x, y) & v_{12}(x, y) \\ v_{21}(x, y) & v_{22}(x, y) \end{pmatrix}.$$

В этом случае обобщенную функцию зрачка представим так:

$$\mathscr{P}(x, y) = p(x, y) \exp[ikW(x, y)] V(x, y),$$

где $p(x, y)$ — функция зрачка, равная единице внутри зрачка и нулю за его пределами; множитель $\exp[ikW(x, y)]$ характеризует фазовые искажения; $k = 2\pi/\lambda$; $W(x, y)$ — эффективная погрешность длины пути; $V(x, y)$ — зависящая от координат матрица Джонса, описывающая поляризационные искажения волнового фронта. Рассуждая аналогично тому, как это делается в работе [3], для когерентной передаточной функции будем иметь

$$\mathscr{H}(f_x, f_y) = \mathscr{P}(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y) = p(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y) \exp[ikW(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y)] \times \times V(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y). \qquad (19)$$

Подставляя выражение (18) для когерентной передаточной функции в (17), для оптической передаточной функции при наличии обобщенной аберрации получим

$$D(f_x, f_y) = \frac{\int\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sp}\left[\mathscr{P}(\xi - \lambda d_i f_x/2, \eta - \lambda d_i f_y/2)\, \mathscr{P}^+(\xi + \lambda d_i f_x/2, \eta + \lambda d_i f_y/2)\right] d\xi d\eta}{\int\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sp}\left[\mathscr{P}(\xi, \eta)\, \mathscr{P}^+(\xi, \eta)\right] d\xi d\eta}. \qquad (20)$$

Так как для не поглощающих свет систем матрицы Джонса являются унитарными [6], т. е.

$$V(\xi, \eta) V^+(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, учитывая, что $p(x, y) p(x, y) = p(x, y)$, соотношение (20) приводится к виду

$$D(f_x, f_y) = \frac{1}{2 \int\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta} \int\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi - \lambda d_i f_x/2, \eta - \lambda d_i f_y/2) \times$$

$$\times p(\xi + \lambda d_i f_x/2, \eta + \lambda d_i f_y/2) \exp\{ik[W(\xi - \lambda d_i f_x/2, \eta - \lambda d_i f_y/2) - W(\xi + \lambda d_i f_x/2, \eta + \lambda d_i f_y/2)]\} \mathrm{Sp}[V(\xi - \lambda d_i f_x/2, \eta - \lambda d_i f_y/2) V^+(\xi + \lambda d_i f_x/2, \eta + \lambda d_i f_y/2)] d\xi d\eta. \qquad (21)$$

В отсутствие поляризационных искажений, т. е. когда

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

формула (20) переходит в соответствующую формулу в работе [3], учитывающую только фазовые искажения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Комиссарчук В. А.** Распределение освещенности в изображении точки и передаточная функция при двойном лучепреломлении в элементах оптической системы.— Опт. и спектр., 1970, т. 29, вып. 1, с. 178.
2. **Шерклифф У.** Поляризованный свет.— М.: Мир, 1965.
3. **Гудмен Дж.** Введение в фурье-оптику.— М.: Мир, 1970.
4. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики.— М.: Наука, 1973.
5. **Maxia Vera.** Light Polarization Problems.— Appl. Opt., 1976, vol. 15, p. 2576.
6. **Takenaka Hiroshi.** A Unified Formalism for Polarization Optics by Using Group Theory.— Nouv. Rev. Opt., 1973, vol. 4, p. 37.

Поступила в редакцию 15 февраля 1980 г.