

элемента по абсциссе точки перегиба характеристической кривой фотомульсии позволяет исключить неопределенность, возникающую при использовании единой опорной линии для всех элементов, на которую указывается также в работе [2].

В процессе эксплуатации программы SUE постоянно накапливается информация, подтверждающая справедливость примененной формулы вычитания интенсивностей. Трудность работы с коэффициентами k_{ij} состоит в том, что не для всех многократно заряженных линий можно найти соответствующие k_{ij} . По-видимому, полезным окажется подход Радермахера и Беске [9], предложивших аппроксимировать параболой зависимость логарифма интенсивности линии от кратности ионизации.

Воспроизводимость результатов обсчета оценивалась путем 4-кратной обработки фото-масс-спектра; разброс значений составил $\sim 3\%$ для «тяжелых» примесей (с концентрацией $\geq 0,01$ вес.%) и $\sim 7\%$ для «легких» примесей. Проверка на соответствие паспортным данным проводилась путем усреднения результатов обсчета по 3 анализам. Разброс значений составил $\sim 5\%$ для основных «тяжелых» примесей и $\sim 35\%$ — для «легких».

ЛИТЕРАТУРА

1. Desjardins M., Moore J. A. Computerized Trace Impurity Measurement in Spark-Source Mass Spectrometry.— Appl. Spectrosc., 1968, vol. 22, p. 713—718.
2. Van Hoye E., Adams F., Gijbels R. Critical Evaluation of an Automatic Photoplate Processing System for Spark-Source Mass Spectra.— Bull. Soc. Chim. Belg., 1975, vol. 84, p. 595—615.
3. Degreve P., Champetier de Ribes D. Computer Program for Precise Evaluation of Photographic Plates in Spark-Source Mass Spectrography.— Int. J. Mass Spectrom. & Ion Phys., 1970, vol. 4, p. 125—136.
4. Дерендяев Б. Г. и др. Автоматизированная обработка данных масс-спектрометрических экспериментов на базе ЭВМ «Минск-32» в режиме низкого разрешения.— Автометрия, 1977, № 4.
5. Бабушкина Т. В., Главин Г. Г., Зеленин А. Е., Костенко Т. А. Случайные и систематические ошибки, возникающие при обработке фотоспектров искрового масс-спектрометра на ЭВМ.— ЖАХ, 1977, т. 32, № 6.
6. Millett E. J., Morice J. A., Clegg J. B. The Computer Evaluation and Interpretation of Photographically Recorded Spark-Source Mass Spectra.— Int. J. Mass Spectrom. & Ion Phys., 1974, vol. 13, p. 1—24.
7. Hull C. W.— In: 10-th Ann. Conf. Mass Spectr. All. Top., ASTM, E-14. New Orleans, La., USA, 1962, p. 404.
8. Schuy K. D., Franzen J. Assessment of Quantitative Evaluation Methods of Photographic Spectra in Mass-Spectroscopic Spark-Source Analysis.— Z. An. Chemie, 1967, Bd 225, S. 260—294.
9. Radermacher L., Beske H. E. Improvement of Analysis in Spark-Source Mass Spectrometry without Standards by Complete Use of Photoplate Information.— Adv. in Mass Spectrometry, 1978, vol. 7, p. 545—548.

*Поступила в редакцию 25 февраля 1980 г.;
окончательный вариант — 1 декабря 1980 г.*

УДК 519.1 : 519.2 : 62-529

В. И. ЗНАК

(Новосибирск)

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРУДОЕМКОСТИ АЛГОРИТМОВ

Задача оценки времени реализации (трудоемкости) алгоритмов и соответствующих машинных программ в том или ином виде возникает во многих практически важных случаях, например при сегментации программ [1], оценке ресурсоемкости управляющих алгоритмов [2], моделировании взаимодействия ветвей параллельных процессов [3], оптими-

зации структуры программ [4] и т. д. Наряду с этим большой интерес представляют величины, характеризующие разброс искомого параметра. Среди таковых наиболее важной является, естественно, дисперсия, однако ее оценка весьма затруднительна [5, 6]. В связи с этим ставится вопрос об оценке граничных значений времени реализации программы. Имеющиеся предложения [6] не проработаны должным образом (отсутствуют рекомендации по нахождению максимального и минимального чисел повторений циклов, не учитывается взаимосвязь числа повторений различных циклов, что имеет место в случае их пересечения при вероятностной трактовке граф-схем). Рассмотрим возможности существующих

Пусть имеется граф-схема $G = G(R, U)$, вершины которой $r_i \in R$ ($i = 1, \dots, n$) представляют операторы некоторой программы, а дуги $u_j \in U$ ($j = 1, \dots, m$) — возможные передачи управления. Подставим каждой вершине r_i ($i = 1, n$) в соответствие параметр $\tau_i = \{\tilde{\tau}_i, \bar{\tau}_i, \hat{\tau}_i\}$, $\tilde{\tau}_i \leq \bar{\tau}_i \leq \hat{\tau}_i$ и каждой дуге — параметр $p_{ik} = \{\tilde{p}_{ik}, \bar{p}_{ik}, \hat{p}_{ik}\}$, $\tilde{p}_{ik} \leq \bar{p}_{ik} \leq \hat{p}_{ik}$. Здесь τ — время реализации соответствующего оператора программы, p_{ik} — условная вероятность перехода к вершине r_k , если в текущий момент достигнута r_i ($r_i, r_k \in R$).

При алгебраическом подходе в качестве математического ожидания времени реализации исследуемого алгоритма рассматривается функция

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n N_i \bar{\tau}_i, \quad (1)$$

где частоты N_i реализации элементов $r_i \in R$ получены из решения матричного уравнения $NP = N$ (P — матрица условных вероятностей передач управления). При использовании сетевого подхода формула оценки времени реализации алгоритма имеет вид

$$\bar{M} = \sum_{j=1}^s \bar{M}_j \bar{R}_j. \quad (2)$$

Здесь трудоемкость j -й ветви алгоритма $\bar{M}_j = \varphi(\bar{\tau}_i, \bar{p}_{ik})$ и вероятность ее реализации $\bar{R}_j = \varphi_i(\bar{p}_{ik})$ получаются через анализ взаимосвязи простых цепей [10] схемы G . При этом $\bar{\tau}_i, \bar{p}_{ik}$ ($i = k = 1, \dots, n$) — средние значения соответствующих параметров.

Рассмотрим эффективность использования формул (1) и (2) для оценки граничных значений трудоемкости алгоритмов и программ.

Опыт показывает, что в большинстве практических случаев функции $E = f(\tau_i, p_{ik})$ и $M = f_1(\tau_i, p_{ik})$ монотонно зависят от своих аргументов в областях $\tau_i \in [\tilde{\tau}_i, \hat{\tau}_i]$ и $p_{ik} \in [\tilde{p}_{ik}, \hat{p}_{ik}]$, при этом аргументы τ_i, p_{ik} взаимно-независимы ($i, k = 1, \dots, n$). В таких случаях перебором на множествах значений параметров p_{ik} ($p_{ik} = \{\tilde{p}_{ik}, \hat{p}_{ik}\}$, порядок перебора произвольный) можно составить пару наборов Δ_1 и Δ_2 , где Δ_1 (или Δ_2) ведет к росту (или снижению) значений функций E и M при фиксированных прочих параметрах. Тогда значения

$$\hat{E}_1 = f(\bar{\tau}_i, \Delta_1), \quad \hat{M}_1 = f_1(\bar{\tau}_i, \Delta_1) \quad (3)$$

можно использовать в качестве верхней (или нижней в случае использования Δ_2) оценки трудоемкости исследуемого алгоритма.

Далее, функции E и M являются монотонно возрастающими для всех аргументов τ . Это позволяет усилить последние оценки и представить

их в виде

$$\widehat{E}_2 = f(\widehat{\tau}_i, \Delta_1) \text{ и } \widehat{M}_2 = f_1(\widehat{\tau}_i, \Delta_1) \quad (4)$$

или

$$\check{E}_2 = f(\check{\tau}_i, \Delta_2) \text{ и } \check{M}_2 = f_1(\check{\tau}_i, \Delta_2), i = 1, \dots, n.$$

Следующая возможность усиления оценок граничных значений трудоемкости связана с учетом особенностей структуры схемы G . При наличии ветвлений в схеме алгоритма сетевой подход позволяет сопоставить оценку трудоемкости соответствующего варианта алгоритма с j -й ветвью ($j = 1, \dots, s$):

$$\widehat{M}_{2j} = \check{M}_j(\widehat{\tau}, \Delta_1) \text{ или } \check{M}_{2j} = \check{M}_j(\check{\tau}_i, \Delta_2).$$

Тогда

$$\widehat{M}_3 = \max_j \widehat{M}_{2j} \text{ или } \check{M}_3 = \min_j \check{M}_{2j} \quad (5)$$

можно рассматривать в качестве заключительной оценки верхнего (или нижнего) значения времени реализации алгоритма.

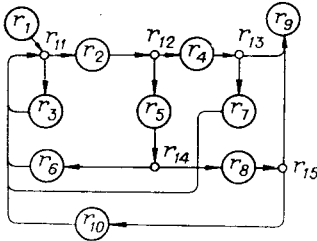
Последняя возможность исключена при использовании алгебраического подхода (если не проводить специального анализа вероятностной матрицы P), так как оценки частот N из функции E взвешены по всем возможным реализациям алгоритма.

Функции E и M (формулы (1) и (2)) получены с использованием одной (марковской) модели программы и отличаются лишь методикой анализа схемы G . В связи с этим должны иметь место равенства

$$\widehat{E}_1 = \widehat{M}_1, \widehat{E}_2 = \widehat{M}_2 (\check{E}_1 = \check{M}_1, \check{E}_2 = \check{M}_2).$$

Вследствие этого алгебраический и сетевой подходы равноправны на первых двух шагах оценки разброса времени реализации алгоритмов. На третьем же этапе структурный подход имеет определенные преимущества. При этом учет числа повторений отдельных циклов проводится формально и не требует специального внимания.

Рассмотрим численный пример. Пусть граф-схема исследуемого алгоритма имеет вид, представленный на рисунке (выделены вершины,



которым соответствует ненулевой параметр τ). Вероятности передач управления (лишь значащие элементы матрицы условных вероятностей P) сведены в табл. 1, при этом отклонение значений такого параметра для всех приведенных элементов $\varepsilon = \pm 0,05$. Здесь строки 1—3 соответствуют наборам \bar{p} , Δ_1 и Δ_2 . Отметим, что вследствие специфики выбранной схемы $p_{13} = p_{33} = p_{63} = p_{73} = p_{10,3}$ и $p_{12} = p_{32} = p_{62} = p_{72} = p_{10,2}$. Обозначим эти величины через p_1

и \bar{p}_1 . Упростим также индексацию величин p_{25} , p_{49} , p_{58} , p_{89} и p_{24} , p_{56} , $p_{8,10}$ посредством обозначений p_2 , p_3 , p_4 , p_5 и \bar{p}_2 , \bar{p}_3 , \bar{p}_4 , \bar{p}_5 соответственно, где $\bar{p}_i = 1 - p_i$ ($i = 1, \dots, 5$). Трудоемкость реализации операторов (в некоторых условных единицах) представлена в табл. 2, где строки 1—3 соответствуют наборам τ , $\hat{\tau}$ и $\check{\tau}$.

Использование алгебраического подхода [7] приводит нас к системе уравнений

$$N_9 = N_1 = 1 \quad (\text{из условия нормировки суммы частот конечных элементов}),$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 p_{12} + N_3 p_{1,2} + N_6 p_{1,2} + N_7 p_{1,2} + N_{10} p_{1,2} &= N_2, \\ N_1 p_{1,3} + N_3 p_{1,3} + N_6 p_{1,3} + N_7 p_{1,3} + N_{10} p_{1,3} &= N_3, \\ N_2 p_{2,4} &= N_4, \\ N_2 p_{2,5} &= N_5, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} N_5 p_{5,6} &= N_6, \\ N_4 p_{4,7} &= N_7, \\ N_5 p_{5,8} &= N_8, \\ N_4 p_{4,9} + N_8 p_{8,9} &= N_9, \\ N_8 p_{8,10} &= N_{10}. \end{aligned} \right\}$$

с последующей оценкой $\bar{E} = \sum_{i=1}^{10} N_i \bar{\tau}_i$.

В результате применения структурного подхода [8] получаем

$$\bar{M} = \bar{M}_1 \bar{R}_1 + \bar{M}_2 \bar{R}_2, \quad (7)$$

что соответствует наличию двух ветвей в схеме алгоритма (или двух простых цепей [10] из начала r_1 схемы G в конец r_3) α_1, α_2 и четырех простых циклов φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Здесь

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_1 &= a/g; \quad \bar{R}_2 = b/g; \quad \bar{M}_1 = T_1 + (1/g) [d(b - p_2^2 \bar{p}_5 \pi_4 / B) + p_2 \bar{p}_4 t_2 + \\ &+ p_2 p_4 \bar{p}_5 t_3 + \bar{p}_2 \bar{p}_3 t_4]; \quad \bar{M}_2 = T_2 + (1/g) [d(g+1) + p_2 \bar{p}_4 t_2 + \\ &+ p_2 p_4 \bar{p}_5 t_3 + \bar{p}_2 \bar{p}_3 t_4]; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{p}_2 \bar{p}_3, \quad b = p_2 p_4 p_5; \quad g = a + b; \quad B = \bar{p}_2 + b; \quad d = t_1 p_1 / \bar{p}_1; \\ \pi_4 &= p_4 - p_4^2; \quad T_i = \sum_{r_j \in \alpha_i} \tau_j, \quad i = 1, 2; \quad t_l = \sum_{r_j \in \varphi_l} \tau_j, \quad l = 1, \dots, 4. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Функцию (7) можно представить в виде

$$M = h/g + ds/g^2, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} h &= \bar{p}_2 f + p_2 e; \quad f = p_3 T_1 + \bar{p}_3 t_4; \quad e = \bar{p}_4 t_2 + p_4 c; \quad c = p_5 T_2 + \bar{p}_5 t_3; \\ s &= p_3 s_1 + s_2; \quad s_1 = \bar{p}_2 + \pi_2 (p_4 p_5 - 1) - p_2 \bar{p}_5 \pi_2 \pi_4 / (\bar{p}_2 + b); \\ s_2 &= (p_2 + p_3 \pi_2) p_4 p_5 + b^2; \quad \pi_i = p_i - p_i^2, \quad i = 2, 4. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Остальные сокращения раскрыты в (9).

Монотонная зависимость функций E и M от τ очевидна. Докажем такого рода зависимость данных функций от прочих аргументов, для чего требуется показать, что соответствующие частные производные либо положительны, либо отрицательны в надлежащих областях.

Т а б л и ц а 1

Номер строки	p_{13}	p_{12}	p_{24}	p_{25}	p_{49}	p_{47}	p_{58}	p_{89}
1	0,125	0,875	0,9	0,1	0,8	0,2	0,35	0,65
2	0,175	0,825	0,85	0,15	0,75	0,25	0,3	0,7
3	0,075	0,925	0,95	0,05	0,85	0,15	0,4	0,6

p_{89}	$p_{8,10}$	p_{33}	p_{32}	p_{63}	p_{62}	p_{73}	p_{72}	$p_{10,3}$	$p_{10,2}$
0,4	0,6	0,125	0,875	0,125	0,875	0,125	0,875	0,125	0,875
0,35	0,65	0,175	0,825	0,175	0,825	0,175	0,825	0,175	0,825
0,45	0,55	0,075	0,925	0,075	0,925	0,075	0,925	0,075	0,925

Таблица 2

Номер строки	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}
1	684	1	483	1	446	349	383	550	28	346	0	0	0	0	0
2	939	1	624	1	486	465	499	600	69	464	0	0	0	0	0
3	425	1	282	1	406	175	212	500	4	135	0	0	0	0	0

Разрешив систему (6) и приведя подобные, получим функцию

$$E = f + e/g. \quad (12)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} f &= \tau_1 + \tau_3; \quad e = d + p_2 c; \quad d = \tau_2 + \tau_4 + \tau_3 p_1 / \bar{p}_1 + \tau_7 \bar{p}_3; \quad c = b + p_4 a; \\ b &= \tau_5 + \tau_6 - \tau_4 - \tau_7 \bar{p}_3; \quad a = \tau_8 - \tau_6 + \tau_{10} \bar{p}_5; \quad g = p_3 \bar{p}_3 + p_2 p_4 p_5. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Частные производные функции (12) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial p_1} &= \frac{\tau_3}{g p_1^2}; \quad \frac{\partial E}{\partial p_2} = \frac{g c - e (p_4 p_5 - p_3)}{g^2}; \quad \frac{\partial E}{\partial p_3} = \frac{-\bar{p}_2 (g \tau_7 + e)}{g^2}; \\ \frac{\partial E}{\partial p_4} &= \frac{p_4 (g a - e p_5)}{g^2}; \quad \frac{\partial E}{\partial p_5} = \frac{-p_2 p_4 (g \tau_{10} + e)}{g^2}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где обозначения a, b, c, d, e, g раскрыты в (13).

Как можно видеть,

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} > 0; \quad \frac{\partial E}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial E}{\partial p_5} < 0; \quad \frac{\partial E}{\partial p_2} > 0 \quad (p_2 \in [0,05; 0,1]); \quad \frac{\partial E}{\partial p_4} > 0 \quad (p_4 \in [0,65; 0,7]).$$

Найдем частные производные функции M :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial p_1} &= \frac{s}{g^2} t_1; \quad \frac{\partial M}{\partial p_2} = \alpha_2 + \frac{d}{g^3} \left[g^2 \{ p_3 \gamma_2 + (1 + \alpha_1 + 2b) p_4 p_5 \} - \right. \\ &- 2s \{ (\alpha_1 + b) p_4 p_5 - \bar{p}_2 p_3^2 \} \}; \quad \frac{\partial M}{\partial p_3} = \alpha_3 + \frac{d}{g^3} \gamma_3; \quad \frac{\partial M}{\partial p_4} = \alpha_4 + \\ &+ \frac{d}{g^3} [g^2 (p_3 \pi_2 \gamma_4 + \gamma_1 p_5) - 2p_5 s \beta]; \\ \frac{\partial M}{\partial p_5} &= \alpha_5 + \frac{d}{g^3} [g^2 (p_3 \pi_2 \gamma_5 + \gamma_1 p_4) - 2p_4 s \beta]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{g(e-f) - h(p_4 p_5 - p_3)}{g^2}; \quad \alpha_3 = \frac{\bar{p}_2 [g(T_1 - t_4) - h]}{g^2}; \\ \alpha_4 &= \frac{p_2 [g(c - t_2) - p_5 h]}{g^2}; \quad \alpha_5 = \frac{p_2 p_4 [g(T_2 - t_3) - h]}{g^2}; \quad \gamma_2 = p_4 p_5 - 2B - \\ &- \frac{\pi_4 p_2 \bar{p}_5}{B} \left(2 - 3p_2 - \pi_2 \frac{p_4 p_5 - 1}{B} \right); \quad \alpha_1 = p_3 (1 - 2p_2); \quad \gamma_3 = g^2 (s_1 + p_4 p_5 \pi_2) - \\ &- 2s (p_3 \bar{p}_3 + p_4 p_5 \pi_2); \quad \beta = p_3 \pi_2 + b p_2; \quad \gamma_4 = p_5 + \frac{p_2 \bar{p}_5}{B} \left(\frac{p_2 p_5 \pi_4}{B} - 1 + 2p_4 \right); \\ \gamma_1 &= p_2 (1 + 2b) + p_3 \pi_2; \quad \gamma_5 = p_4 + \frac{p_2 \pi_4}{B} \left(1 + \frac{p_2 p_4 p_5}{B} \right), \end{aligned}$$

прочие обозначения раскрыты в (9), (11).

Таблица 3

Поведение найденных функций (15) аналогично поведению производных (14) от функции E . Таким образом, функции E и M (формулы (12) и (10) соответственно) монотонно зависят от своих параметров в области задания, что и требовалось доказать.

Номер строки	$(\bar{\tau}, \bar{\rho})$	$(\bar{\tau}, \Delta_1)$	$(\hat{\tau}, \Delta_1)$	Перебор ветвей
1	1041	1230/891	1643/546	1643/546
2	1037	1219/890	1629/545	2802/530

Результаты последовательной оценки верхней и нижней границ трудоемкости алгоритма (или соответствующей программы) сведены в табл. 3, где колонки обозначены символами параметров, посредством которых получена соответствующая величина, и строки 1, 2 соответствуют оценкам E и M ; оценка верхней границы отделена от нижней косой чертой (последняя дана снизу). Здесь значения оценок в колонках $(\bar{\tau}, \bar{\rho})$, $(\bar{\tau}, \Delta_1)$, $(\hat{\tau}, \Delta_1)$ совпадают с точностью до ошибок счета (расчеты проводятся по различным схемам, и характер накопления в них отмеченных ошибок требует специального рассмотрения).

В том случае, когда исследуемые функции в той или иной мере не удовлетворяют требованиям монотонности, оценки можно найти с помощью соответствующих приемов математического анализа. В принципе частный вид такого рода функций и их поведение определяются структурой исходной схемы, точнее, характером пересечения циклов в случае их наличия. Однако этот вопрос требует более подробного исследования.

Таким образом, в результате проведенного анализа можно сделать вывод: использование сетевого подхода для оценки граничных значений трудоемкости алгоритмов и машинных программ позволяет получать более сильные по сравнению с алгебраическим подходом оценки в том случае, когда исследуемый алгоритм имеет более одной ветви (или варианта) реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kral I. One Way of Estimation Frequencies of Jumps in a Program.— Comm. ACM, 1968, vol. 11, p. 475—480.
2. Кауфман В. Ш. Методика оценки ресурсоемкости управляющих программ.— В кн.: Вопросы системного программирования/МГУ. М.: НИВЦ, 1977, вып. 3, с. 32—43.
3. Колосова Ю. И., Миренков Н. Н. Исследование взаимодействий параллельных процессов.— В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск: изд. ИМ СО АН СССР, 1973, вып. 57, с. 115—124.
4. Cocks J., Kennedy K. Profitability Computations on Program Flow Graphs.— Comput. and Math., 1976, vol. 2, p. 145—159.
5. Герман В. А. О расчете времени исполнения машинных программ.— В кн.: Цифровая вычислительная техника и программирование. М.: Сов. радио, 1972, вып. 7, с. 37—50.
6. Основы теории вычислительных систем/Под ред. С. А. Майорова.— М.: Высш. школа, 1978.
7. Карп Р. М. О приложении теории графов к программированию.— В кн.: Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1964, вып. 4, с. 123—134.
8. Знак В. И. Алгоритм априорной оценки времени машинной реализации программы.— Автоматика, 1972, № 1.
9. Кутепов В. П., Перцов Е. Е. Оценка вероятности и среднего времени для множества путей вероятностного графа по регулярным выражениям.— В кн.: Цифровая вычислительная техника и программирование. М.: Сов. радио, 1974, вып. 8, с. 16—20.
10. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 25 мая 1978 г.;
окончательный вариант — 28 октября 1980 г.