Все перечисленные исследования были повторены при $T = 32$; $N = 2, 4, 8$; $\tau_0 = 2, 4, 8$; $\rho(\tau) = e^{-\tau/\tau_0}$ и $\rho(\tau) = 1 - \tau/2\tau_0$; $\tau \leqslant 2\tau_0$, и отклонений от изложенного варианта обнаружено не было.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буймов А. Г., Решетников М. Т.** Случайное поле Пальма.— Труды X Всесоюз. школы-семинара по статистической гидроакустике (Сухуми).— Киев: изд. Киевского политехн. ин-та, 1978.
2. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
3. **Буймов А. Г.** К статистике пальмовских полей.— Автометрия, 1981, № 6.
4. **Митропольский А. К.** Техника статистических вычислений. М.: ФМ, 1961.

Поступило в редакцию 11 декабря 1979 г.

УДК 621.391.19

Ю. К. КЛОКОВ, В. Н. СИДЕЛЬНИКОВ, Р. Р. ХАМИТОВ

(Москва)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЕ ВЕРХНЮЮ ГРАНИЦУ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ КЛАССИФИКАЦИИ ПУАССОНОВСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Задача классификации, решаемая на ЭВМ, связана со значительными вычислительными затратами, если велика размерность N_0 вектора наблюдений. Один из эффективных путей сокращения этих затрат — проведение классификации в преобразованном пространстве образов меньшей размерности $N \ll N_0$.

Пусть наблюдаемый образ $\tilde{J}(s)$ является совокупностью (потоком) точек

$$\tilde{J}(s) = \sum_{i=1}^{n} \delta(s - s_i) \tag{1}$$

(s — пространственная или временная переменная) и описывается системой плотностей распределения вероятностей

$$p[\tilde{J}(s) \mid J_k(s)] = p(n;\, s_1, s_2, \ldots, s_n \mid J_k(s)) =$$
$$= \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (J_k(s_i) + J_ф) \exp\left\{-\int (J_k(s) + J_ф)\, ds\right\}, \tag{2}$$

где интенсивность потока $J_k(s) + J_ф$ представлена в виде суммы полезного (эталонного) процесса и постоянного фона. Известны априорные вероятности $p[J_k(s)] = p_k$, и при классификации требуется отнести наблюдаемый образ $\tilde{J}(s)$ к одному из эталонов J_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

В работе * показано, что при оптимальной байесовской классификации для верхней границы вероятности ошибки справедливо

$$P_e \leqslant \sum_{k}^{m} \sum_{l}^{m} P_k P_l \int p(X \mid \omega_k) \ln p(X \mid \omega_l)\, dX - \sum_{k}^{m} P_k \int p(X \mid \omega_k) \ln p(X \mid \omega_k)\, dX + C =$$
$$= \sum_{k}^{m} P_k \left\{ \sum_{l}^{m} P_l \overline{\ln p(X \mid \omega_l)} - \overline{\ln p(X \mid \omega_k)} \right\} + C, \tag{3}$$

где усреднение ведется по всем наблюдениям X относительно распределения $p(X|\omega_k)$, ω_k — эталонный образ.

---

* **Babu C. Chitti.** On Feature Extraction in Pattern Recognition.— In: Proc. 5-th Hawaii International Conference on System Science. Honolulu, 1972, p. 11—13.

Перепишем это неравенство в принятых нами обозначениях:

$$P_e \leqslant \sum_{k=1}^{m} P_k \left\{ \sum_{l=1}^{m} P_l \overline{\ln p[\widetilde{J}(s) \mid J_l(s)]} - \overline{\ln p[\widetilde{J}(s) \mid J_k(s)]} \right\} + C. \tag{4}$$

Пусть $\{\varphi_\rho(s)\}$, $\rho = 0, 1, \ldots$ — искомое множество ортонормированных базисных функций переменной s, тогда

$$\widetilde{J}(s) = \sum_{i=1}^{n} \delta(s - s_i) = \sum_{\rho=0}^{\infty} C_\rho \varphi_\rho(s), \quad C_\rho = \sum_{i=1}^{n} \varphi_\rho(s_i), \tag{5}$$

а среднее значение логарифма плотности (2) равно

$$\overline{\ln p[\widetilde{J}(s) \mid J_k(s)]} = -\overline{\ln n!} - \int\limits_S [J_k(s) + J_\phi] ds + \overline{\int\limits_S \widetilde{J}(s) \ln [J_k(s) + J_\phi]\, ds}. \tag{6}$$

Вычислим среднее значение последнего в этой сумме члена:

$$\overline{\int\limits_S \widetilde{J}(s) \ln [J_k(s) + J_\phi]\, ds} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(n)} \int\limits_S \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_\rho(s_i) \varphi_\rho(s) \ln [J_k(s) + J_\phi]\, ds \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} (J_k(s_i) + J_\phi) e^{-\int\limits_S (J_k(s) + J_\phi) ds} ds_1 \ldots ds_n = \sum_{\rho=0}^{\infty} \int \int\limits_S \varphi_\rho(s) [J_k(s) + J_\phi] \times$$

$$\times \ln [J_k(s') + J_\phi] \varphi_\rho(s')\, ds ds'. \tag{7}$$

Так как

$$\sum_{l}^{m} P_l \ln p[\widetilde{J}(s) \mid J_l(s)] = -\ln n! - \int\limits_S \overline{[J(s)} + J_\phi]\, ds + \int\limits_S \widetilde{J}(s) \overline{\ln [J(s) + J_\phi]}\, ds, \tag{8}$$

то для среднего значения последнего в этой сумме члена после аналогичных (7) выкладок получим

$$\overline{\int\limits_S \widetilde{J}(s) \overline{\ln [J(s) + J_\phi]}\, ds} = \sum_{\rho=0}^{\infty} \int\limits_S \int\limits_S \varphi_\rho(s) [J_k(s) + J_\phi] \overline{\ln [J(s') + J_\phi]} \varphi_\rho(s')\, ds ds'. \tag{9}$$

Так как константа C в неравенстве (3) не зависит от преобразования ранее упомянутой работы, то для вероятности ошибки P_e классификации теперь находим

$$P_e \leqslant C - \sum_{\rho=0}^{\infty} \int\limits_S \int\limits_S \varphi_\rho(s) \{\overline{J(s) \ln [J(s') + J_\phi]} - \overline{J(s)}\, \overline{\ln [J(s') + J_\phi]}\} \varphi_\rho(s')\, ds ds'. \tag{10}$$

Для минимизации P_e при фиксированном числе N членов разложения по базису $\{\varphi_\rho(s)\}$ требуется в качестве базисных функций выбирать такие, которые представляют максимум квадратичной формы в правой части неравенства (10). Легко видеть, что максимум формы

$$\sum_{\rho=0}^{N} \int\limits_S \int\limits_S \varphi_\rho(s) \{\overline{J(s) \ln [J(s') + J_\phi]} - \overline{J(s)}\, \overline{\ln [J(s') + J_\phi]}\} \varphi_\rho(s')\, ds ds' \tag{11}$$

достигается на собственных функциях

$$k_\pi(s', s) = \{\overline{J(s) \ln [J(s') + J_\phi]} - \overline{J(s)}\, \overline{\ln [J(s') + J_\phi]}\}, \tag{12}$$

соответствующих большим собственным значениям $k_\pi(s, s')$.

Для сравнения отметим, что в случае наблюдений в аддитивном некоррелированном гауссовом шуме этот максимум достигается на собственных функциях $\{\varphi_\rho(s)\}$ для

$$k_G(s, s') = \{\overline{J(s) J(s')} - \overline{J(s)}\, \overline{J(s')}\}, \tag{13}$$

известных как базисные функции Карунена — Лоэва.

Поступило в редакцию 17 августа 1979 г.