А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1981

УДК 681.3.142

А. Л. РЕЗНИК
(Новосибирск)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ НЕПРЕРЫВНОГО СЧИТЫВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СТРУКТУРЫ

Предлагаемая статья является продолжением работ [1] и [2], в которых описывались алгоритмы аналитического решения на ЭВМ задач, касающихся вычисления формул для объемов выпуклых многогранников. Изложенные в них методы применялись для исследования следующей модели.

Имеется многоканальная обслуживающая система с k входами и постоянным временем обслуживания τ. Заявки представляют собой поток Бернулли. Требуется определить вероятность того, что за время T, в течение которого в систему должно поступить n заявок, время ожидания обслуживания каждой заявки будет нулевым. С математической точки зрения эта задача эквивалентна отысканию вероятности безошибочного считывания «щелью» шириной τ изображений дискретной структуры при наличии k пороговых уровней [3]. Для $k=1$ решение известно (см. [4]):

$$P_n^1(\tau) = (1-(n-1)\,\tau/T)^n, \quad 0<\tau\leqslant T/(n-1).$$

Алгоритмы, приводимые в [1] и [2], дают возможность рассчитать на ЭВМ вероятностные формулы $P_n^k(\tau)$ для любых, но заранее фиксированных значений n и k. Анализ этих формул показывает, что при двух пороговых уровнях

$$P_n^2(\tau) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i R_i(n)\,(\tau/T)^i, \quad 0<\tau\leqslant T\Big/\left[\frac{n+1}{2}\right], \tag{1}$$

где $R_i(n)$ — некоторые полиномы степени $[i/2]$. (Здесь и далее $[z]$ означает целую часть числа z.)

Определение явного вида этих полиномов требует большого объема вычислений, связанных с нахождением формул $P_n^2(\tau)$ при конкретных значениях n. Объем их столь значителен, что использование программных алгоритмов из работ [1, 2] в данном случае оказывается малоэффективным, так как с ростом n быстро увеличивается кратность и количество интегралов, аналитическое интегрирование которых ведется в ЭВМ. Главная причина такого роста заключается в том, что эти алгоритмы в какой-то степени универсальны и не учитывают специфики каждой отдельной задачи.

Ниже описывается метод, направленный на решение узкоспециализированной задачи вычисления на ЭВМ формул $P_n^2(\tau)$, т. е. соотношений для вероятности безошибочного считывания изображений дискретной структуры при наличии двух пороговых уровней. Одно из преимуществ предлагаемого подхода состоит в том, что он позволяет абсолютно всю работу по расчету формул, включая их вывод на графопостроитель, проводить на ЭВМ. Не менее существенно то обстоятельство, что возросло и быстродействие алгоритмов. Сначала в ЭВМ рассчитываются вероятностные характеристики для процесса многоступенчатого дискретного сканирования, а затем (но в рамках той же программной единицы) предельным переходом получаются формулы для непрерывного «щелевого» считывания.

Сканируемый интервал $(0, T)$ делится на r равных дискретов. Равномерное распределение n сигнальных отсчетов интерпретируется как случайное бросание n неразличимых шаров по r ящикам. Непрерывное считывание заменяется следующим: сначала определяется сумма шаров в l $(l \leqslant r)$ последовательных дискретах, начиная с первого, затем — начиная со второго и т. д. Таким образом, аналогом «щели» является совокупность l последовательных дискретов. Если ни в одной такой «щели» не окажется больше двух шаров, то будем говорить, что бросание было «удачным», а считывание — безошибочным. Если бы удалось получить явное выражение $Q(r, n, l)$ для числа всевозможных «удачных» бросаний, то, разделив его на общее число исходов опыта $Q(r, n)$ (а оно известно — C_{n+r-1}^{r-1} [5]), можно было бы вычислить искомую вероятность безошибочного непрерывного считывания $P_n^2(\tau)$ как предел этого отношения при $r \to \infty$, $l/r \to \delta = \tau/T$. Но получение прямой формулы для $Q(r, n, l)$ представляется вряд ли возможным (это было бы равносильно решению поставленной задачи), а вот рекуррентные соотношения получить сравнительно просто, в результате чего и появляется возможность всю работу по отысканию формул вероятности $P_n^2(\tau)$ проводить на ЭВМ.

Прежде чем привести рекуррентные соотношения, введем ряд соглашений относительно дальнейших обозначений. Количество шаров n запишем в таком виде: $n = 2N + s$; $N = 0, 1, 2\ldots$; $s = 1, 2$. Общее число «удачных» бросаний n шаров по r ящикам при условии, что один шар попал в 1-й ящик, один шар — в i-й, а остальные попали в ящики с номерами, большими, чем $i (i \leqslant l)$, обозначим $q(i, r, n, l)$.

При фиксированном n функции $q(i, r, n, l)$ и $Q(r, n, l)$ представляют собой кусочно-полиномиальные выражения относительно остальных аргументов. Для полиномов, описывающих поведение этих функций на отдельных участках, введем такие обозначения:

$$
\begin{array}{lll}
q_0(i, r, n, l) \equiv q(i, r, n, l) & \text{при} & (N+2)l < r; \\
q_1(i, r, n, l) \equiv q(i, r, n, l) & \text{при} & (N+1)l < r \leqslant (N+2)l; \\
q_2(i, r, n, l) \equiv q(i, r, n, l) & \text{при} & Nl < r \leqslant (N+1)l; \\
Q_0(r, n, l) \equiv Q(r, n, l) & \text{при} & (N+1)l < r; \\
Q_1(r, n, l) \equiv Q(r, n, l) & \text{при} & Nl < r \leqslant (N+1)l.
\end{array}
$$

Тогда сами рекуррентные соотношения будут выглядеть следующим образом:

1) для $s = 2$ (n четно)

$$
q_0(i, r, n, l) = Q_0(r - l - i, n - 2, l) + \sum_{i_1=0}^{i} Q_0(r - 2l - i_1, n - 3, l) +
$$

$$
+ \sum_{i_1=0}^{i} \sum_{i_2=i-i_1}^{l} q_0(i_2, r - l - i_1, n - 2, l);
$$

$$q_1(i,r,n,l) = Q_0(r-l-i,\ n-2,l) + \sum_{i_1=0}^{i} \sum_{i_2=i-i_1}^{r-Nl-i_1} q_1(i_2,\ r-l-i_1,\ n-2,l);$$

$$q_2(i,r,n,l) = 0;$$

$$Q_0(r,n,l) = \sum_{k=Nl}^{r} \sum_{i=0}^{k-Nl} q_1(i,k,n,l);$$

$$Q_1(r,n,l) = Q_1(r-1,n,l) + Q_1(r-l,\ n-1,l) + \sum_{i=0}^{l} q_0(i,r,n,l);$$

2) для $s=1$ (n нечетно)

$$q_0(i,r,n,l) = Q_0(r-l-i,\ n-2,l) + \sum_{i_1=0}^{i} Q_0(r-2l-i_1,\ n-3,l) + \sum_{i_1=0}^{i} \sum_{i_2=i-i_1}^{l} q_0(i_2,\ r-l-i_1,\ n-2,\ l);$$

$$q_1(i,r,n,l) = Q_1(r-l-i,\ n-2,\ l) + \sum_{i_1=0}^{i} Q_1(r-2l-i_1,\ n-3,\ l) + \sum_{i_1=0}^{i} \sum_{i_2=i-i_1}^{r-Nl-i_1} q_1(i_2,\ r-l-i_1,\ n-2,\ l) + \sum_{i_1=0}^{i} \sum_{i_2=r-Nl-i_1}^{l} q_2'(i_2,\ r-l-i_1,\ n-2,\ l);$$

$$q_2(i,r,n,l) = \sum_{i_1=0}^{r-Nl} Q_1(r-2l-i_1,\ n-3,\ l) + \sum_{i_1=0}^{r-Nl} \sum_{i_2=i-i_1}^{l} q_2(i_2,\ r-l-i_1,\ n-2,\ l);$$

$$Q_0(r,\ n,\ l) = \sum_{k=Nl}^{r} \sum_{i=0}^{k-Nl} q_1(i,k,n,l);$$

$$Q_1(r,n,l) = \sum_{k=Nl}^{r} \left\{ Q_1(k-l,\ n-1,\ l) + \sum_{i=0}^{k-Nl} q_1(i,k,n,l) + \sum_{i=k-Nl}^{l} q_2(i,k,n,l) \right\}.$$

В ЭВМ последовательно для $n=3,\ 4,\ 5\ldots$ происходит расчет формул $Q_0(r,\ n,\ l)$ и $Q_1(r,\ n,\ l)$ как функций от r и l при фиксированном n. Затем вычисляются $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ l/r\to\delta=\tau/T}} \dfrac{Q_0(r,n,l)}{Q(r,n)}$ и $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ l/r\to\delta=\tau/T}} \dfrac{Q_1(r,n,l)}{Q(r,n)}$. Начальные данные для инициации рекуррентно-рекурсивного вычислительного процесса берутся из тривиальных соображений, когда $n=0,\ 1,\ 2$. Таким образом, для каждого фиксированного значения n находится формула $P_n^2(\tau)$. Далее, используя соотношение (1), определяются полиномы $R_i(n)$. Для этого, как нетрудно видеть, на каждом этапе необходимо решить систему $[i/2]+1$ линейных уравнений с $[i/2]+1$ неизвестными. Завершает работу ЭВМ вывод полученных формул на графопостроитель.

Вычисления, проведенные на ЭВМ ЕС-1020, показывают, что искомая вероятность $P_n^2(\delta)$ на участке $0<\delta\leqslant 1/[(n+1)/2]$ имеет такой вид:

$$P_n^2(\delta) = C_n^0 + C_n^2(-n+2)\delta^2 + C_n^3(4n-10)\delta^3 + C_n^4 \times (3n^2-37n+86)\delta^4 + C_n^5(-40n^2+394n-922)\delta^5 + C_n^6(-15n^3 + 625n^2 - 5171n + 12086)\delta^6 + C_n^7(420n^3 - 10724n^2 + 79996n - 187002)\delta^7 + C_n^8(105n^4 - 10570n^3 + 205499n^2 - 1426841n + 3336406)\delta^8 + 0(\delta^8).$$

Кроме того, анализ формул $P_n^k(\delta)$, рассчитанных для фиксированных значений n и k, позволил установить, что при четных n на участке $1/[(n+1)/2] < \delta < 1/[(n-1)/2]$ имеет место замкнутое аналитическое соотношение

$$P_n^2(\delta) = \frac{2}{n} C_n^{n/2-1}\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\delta\right)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве.— Автометрия, 1976, № 1.
2. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли.— Автометрия, 1977, № 4.
3. **Ефимов В. М., Искольдский А. М., Крендель Ю. М., Лившиц З. А.** О характеристиках различных методов считывания изображений дискретной структуры.— Автометрия, 1973, № 1.
4. **Уилкс.** Математическая статистика. М.: Мир, 1966.
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию 5 ноября 1980 г.

УДК 681.32.05

М. А. СТАРКОВ

(Новосибирск)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В статье * предложена модель бинарных изображений и на примерах показана ее эффективность. В настоящей работе дается обобщение статистической модели на случай многоградационных изображений. Предполагается, что читатель знаком с упомянутой публикацией, поэтому введенные в ней определения здесь не разъясняются. В целях экономии места громоздкие математические выкладки опущены там, где это не идет в ущерб изложению основного материала.

Будем рассматривать изображения, заданные на прямоугольной матрице или бесконечной квадратной сетке, причем каждый элемент изображения может принять одно из значений множества чисел $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Такое представление изображений наилучшим образом приближается к тому, что получается после оцифровки реального фотоснимка. Введем следующее определение: r-м сечением многоградационного изображения X назовем бинарное изображение X^r, которое получается из многоградационного изображения по правилу

$$x_{j,k}^r = \begin{cases} 1, & x_{j,k} \geqslant r, \\ 0, & x_{j,k} < r \end{cases} \tag{1}$$

(далее МИ обозначает многоградационное изображение, БИ — бинарное изображение). В упомянутой выше работе показано, что статистика БИ может быть хорошо представлена разностным уравнением второго порядка

$$\Delta P_{j,k} - \lambda(P_{j,k} - h) = 0, \quad (j, k) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

где $P_{j,k}$ — вероятность реализации единицы в (j, k)-й точке БИ, а Δ —

---

* **Старков М. А.** Статистическая модель бинарных изображений.— Автометрия, 1979, № 5.