ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972.
2. **Крейн М. Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Успехи мат. наук, 1958, т. 13, № 5.
3. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Fortmann T. E., Anderson B. D. O.** On the Approximation of Optimal Realizable Linear Filters Using a Karhunen — Loeve Expansion.— IEEE Trans. Information Theory, 1973, vol. IT-19, p. 561—564.
5. **Gardner W. A.** A Simple Solution to Smoothing, Filtering and Prediction Problems Using Series Representations.— IEEE Trans. Information Theory, 1974, vol. IT-20, p. 271—274.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
7. **Диденко В. П., Козлов Н. Н.** Регуляризованный метод решения задач оценки сообщений.— ДАН, 1975, т. 222, № 5.
8. **Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.** Фильтрация и регуляризация. Киев.: изд. КГУ, 1977.

Поступила в редакцию 2 февраля 1979 г.;
окончательный вариант — 17 сентября 1980 г.

УДК 621.317.080

Б. А. БЕСЕДИН

(Омск)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И КОМПЛЕКТОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Постановка задачи. Пусть известно, что наблюдаемая траектория $x(t)$ и известная номинальная траектория $\bar{x}(t)$ принадлежат одному классу линейных относительно вектора θ гладких функций $x(t) = F^+(t)\theta$, и пусть траектория $x(t)$ находится в малой окрестности номинальной траектории $\bar{x}(t) = F^+(t)\bar{\theta}$; ранг матрицы $F(t)$ равен размерности векторов θ, $\bar{\theta}$ для любого $t = \overline{1, T}$. (Здесь и ниже знак «+» при векторах и матрицах означает их транспонирование.)

Статистическая оценка траектории $x(t)$ строится по результатам косвенных измерений приборами из списка $\mathscr{L} = (1, 2, \ldots, L)$. Измерительный прибор l-го типа ($l \in \mathscr{L}$) описывается уравнением

$$y_l = \varphi_l(x(t), z) + \eta_l(t), \tag{1}$$

где для каждого момента времени $t = \overline{1, T}$ вектор-столбцы $y_l(t)$ и $\eta_l(t)$ — соответственно результат и ошибка измерения в момент t; $\varphi_l(t)$ — известные дифференцируемые вектор-функции; z — координаты местоположения прибора ($z \in X$).

Предположим, что ошибки измерений $\eta_l(t)$ статистически независимы для любой тройки (l, t, t'), $t \neq t'$, и распределены нормально с нулевыми средними и корреляционными матрицами $G_l(x, z) \equiv M\left[\eta_l(t)\eta_l^+ \times \times (t) \mid x(t) = x, z\right]$, M — знак математического ожидания.

Определение 1. Пусть $N = (N_1, N_2, \ldots, N_L)$ — комплект приборов из списка $\mathscr{L}$, где N_l — число приборов l-го типа. Планом размещения комплекта N в заданной области X назовем совокупность $\rho(N) = (z_k, \nu_{lk}, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, L})$, где z_k — координаты k-го пункта размещения, $z_k \in X$, ν_{lk} — число приборов l-го типа в k-м пункте.

Пусть $\widehat{\theta}$ и $\widehat{x}(t)=F^{+}(t)\widehat{\theta}$ — наилучшие линеаризованные в окрестности $\bar{x}(t)$ статистические оценки [4] вектор-столбца θ и точки $x(t)$ траектории при фиксированном плане $\rho(N)$. Информационная матрица $\Phi(\rho(N))$ оценки $\widehat{\theta}$ и корреляционная матрица $d(t,\ \rho(N))$ оценки $\widehat{x}(t)$ явным образом зависят от комплекта N и плана его размещения $\rho(N)$ и имеют вид [1, 4]

$$\Phi(\rho(N))=\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{n}\nu_{lk}A^{+}(t,z_k)\,G_l^{-1}\left(\bar{x}(t),z_k\right)A_l(t,z_k), \tag{2}$$

$$A_l(t,z_k)=\left[\frac{\partial\varphi_l(x(t),z_k)}{\partial x(t)}\right]\Big|_{x(t)=\bar{x}(t)}F^{+}(t),$$

$$d(t,\ \rho(N))=F^{+}(t)\ D(\rho(N))F(t) \tag{3}$$

$(D(\rho(N))=\Phi^{-1}(\rho(N))$ — корреляционная матрица оценки $\widehat{\theta}$ вектора θ; в интересующих нас случаях матрица $\Phi(\cdot)$ не вырождена).

Пусть c_l — цена прибора l-го типа. Задача выбора из списка $\mathscr{L}$ комплекта приборов минимальной стоимости, размещение которых в заданной области удовлетворяет определенным требованиям на точность построения наилучшей линеаризованной статистической оценки наблюдаемой траектории, формулируется следующим образом.

Требуется найти комплект приборов N, доставляющих минимум суммарной стоимости

$$\sum_{l=1}^{L}c_lN_l, \tag{4}$$

план размещения которого $\rho(N)$ удовлетворяет условиям

$$\min_{\rho(N)}\psi(D(\rho(N)))\leqslant\varepsilon, \tag{5}$$

$$z_k\in X,\quad k=\overline{1,n},\quad \sum_{k=1}^{n}\nu_{lk}=N_l,\quad N_l\leqslant N_l^0,\quad l=\overline{1,L}, \tag{6}$$

$$n,\ \nu_{lk},\ N_l \text{ — целые числа}, \tag{7}$$

где ε — заданная положительная величина, $\psi(\cdot)$ — одна из функций неэффективности статистической оценки, принятых в теории эксперимента (см. [5], а также следующий раздел).

Задача (4)—(7) может быть модифицирована, если заменить условие (5) следующим:

$$\min_{\rho(N)}\psi(d(t,\rho(N)))\leqslant\delta,\quad t=\mathrm{const}. \tag{8}$$

Критерии неэффективности оценки и некоторые их свойства. Тип экстремальной задачи (4)—(7) (и ее модификации (8)) и алгоритм ее решения существенно определяются экстремальным условием (5) (соответственно (8)). Конкретизируем эти задачи.

Для определенности рассмотрим два случая функции $\psi(\cdot)$ неэффективности оценки.

Для задачи с ограничением (5) определим

$$\psi(D(\rho(N)))=\ln|D(\rho(N))| \tag{9}$$

либо

$$\psi(D(\rho(N)))=\mathrm{Sp}\,[D(\rho(N))W], \tag{10}$$

где $|D(\cdot)|$ — определитель, Sp — след матрицы, W — неотрицательно или положительно определенная матрица совпадающей с $D(\cdot)$ размерности.

Для задачи с ограничением (8) вместо (5) положим

$$\psi(d(t, \rho(N))) = \max_i d_{ii}(t, \rho(N)) \tag{11}$$

($d_{ii}(\cdot)$ — диагональный элемент матрицы $d(\cdot)$ (дисперсия)) или

$$\psi(d(t, \rho(N))) = \mathrm{Sp}\,[d(t, \rho(N))V] \tag{12}$$

(V — неотрицательно или положительно определенная матрица совпадающей с $d(\cdot)$ размерности).

При выборе алгоритма решения задачи (4)—(7) полезны свойства монотонности функционалов (9)—(12). Обозначим $N \succ N'$, если $N \geqslant N'$ покомпонентно и хотя бы для одной компоненты l $N_l > N_l'$. Далее, как и в [5], план размещения $\rho(N)$ в области X комплекта N будем называть невырожденным, если не вырождена порождаемая им информационная матрица (2).

Довольно громоздкие формальные доказательства следующих ниже двух утверждений о монотонности характеристик оценок здесь не приводятся в силу их достаточной очевидности.

Утверждение 1. Пусть функционал $\psi(\cdot)$ определен выражением (9) или (10) и $N \succ N'$. Тогда

$$\min_{\rho(N)} \psi(D(\rho(N))) \leqslant \min_{\rho(N')} \psi(D(\rho(N))), \tag{13}$$

где минимумы берутся по всем невырожденным планам размещения в X фиксированных комплектов приборов N и N'.

Утверждение 2. Пусть функционал $\psi(\cdot)$ определен выражением (11) или (12) и $N \succ N'$. В таком случае

$$\min_{\rho(N)} \psi(d(t, \rho(N))) \leqslant \min_{\rho(N')} \psi(d(t, \rho(N))). \tag{14}$$

Здесь $t \in [1, T]$, а минимумы берутся по всем невырожденным планам размещения в X фиксированных комплектов N и N'.

Алгоритм решения задачи комплектования измерительных приборов. Отмеченное выше свойство монотонности функционалов $\psi(\cdot)$ позволяет построить ряд алгоритмов выбора оптимального комплекта приборов независимо от алгоритма решения подзадачи оптимального его размещения. Эти алгоритмы основываются на следствии, которое вытекает из утверждений 1, 2.

Следствие. Пусть $\psi(\cdot)$ — любой из функционалов (9)—(12) и комплект N является допустимым ($N \succ 0$, $N \prec N^0$). Тогда если $\min\limits_{\rho(N)} \psi(\cdot) \leqslant \leqslant \varepsilon (\leqslant \delta)$, то любой комплект $N' \succ N$ не оптимален по стоимости и исключается из рассмотрения; в противном случае для любого комплекта приборов $N'' \prec N$ не существует размещения в X, удовлетворяющего ограничению по точности, и такие комплекты N'' исключаются из рассмотрения.

Таким образом, выбирая случайно или по некоторому другому правилу допустимый комплект N и решая задачу его оптимального размещения, каждый раз из допустимого множества комплектов будем исключать или подмножество комплектов, мажорирующих N (неравенства (5), (8) выполняются), или подмножество комплектов, мажорируемых комплектом N (неравенства (5), (8) не выполняются).

Для иллюстрации рассмотрим случай приборов двух типов ($L = 2$) и сформулируем алгоритм с неслучайным выбором допустимых комплектов, имеющий очень простую структуру.

1. Сначала выбираем такой комплект $N = (N_1, N_2)$, что $N_1 = N_1^0$, $N_2 = 0$.

2. Решаем задачу оптимального размещения в X комплекта N.

3. Если неравенство (5) (или (8)) удовлетворяется, переходим к

п. 2 с комплектом $N=(N_1-1,\ N_2)$, в противном случае — к п. 2 с комплектом $N=(N_1,\ N_2+1)$.

Итерации продолжаются до тех пор, пока $N_1\geqslant 0$, $N_2\leqslant N_2^0$. Комплект минимальной стоимости является решением задачи.

Описанный алгоритм опробован на простых примерах, имеющих практический интерес. Время счета на ЭВМ БЭСМ-6 не превышало 2 мин.

Алгоритм приближенного решения задач оптимального размещения комплекта измерительных приборов. Заметим, что с учетом выражений (2) и (3) задача размещения (5) с функционалом (9) или (10) представляет собой обобщение известных задач теории экспериментов [5]. Совпадение по форме имеет место в том случае, когда $L,\ T=1$, а область размещения X компактная. Задача (8) с функционалом (11) или (12) такого аналога не имеет.

Задачи рассматриваемого здесь типа многоэкстремальные и весьма трудоемкие в вычислительном отношении [3]. Поэтому представляется целесообразным искать приближенное решение задачи оптимального размещения приборов по методу, сходному с развитым в теории экспериментов [5]: заменить целочисленный относительно ν_{lk} план на непрерывный нормированный.

Определение 2. Непрерывным нормированным аналогом плана $\rho(N)$ назовем совокупность $p(N)=(z_k,\ p_{lk},\ k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,L})$, где $0\leqslant p_{lk}\leqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}p_{lk}=1$, а порождаемая ею информационная матрица

$$\Phi(p(N))=\sum_{l=1}^{L}N_l\sum_{k=1}^{n}p_{lk}\sum_{t=1}^{T}A_l^{+}(t,z_k)\,G_l^{-1}(\bar{x}(t),z_k)\,A_k(t,z_k). \qquad (15)$$

Будем теперь искать «долевое» размещение на множестве X фиксированного комплекта приборов $N=(N_1,N_2,\ldots,N_L)$. Иначе говоря, заменяя в (5), (8), (9)—(12) $\Phi(\rho(N))$ на $\Phi(p(N))$ согласно (15), будем иметь задачи минимизации функционалов (9)—(12) на множестве всех невырожденных непрерывных нормированных планов.

Утверждение 3. Функционалы (9)—(12) выпуклы на множестве невырожденных информационных матриц.

Доказательство. Для функционалов (9), (10) доказательство содержится, по существу, в [5], так что рассмотрим сразу случай $\psi(p(N))=$ $=\max\limits_{i}d_{ii}(t,\ p(N))$, $t=\mathrm{const}$. Пусть $p_1(N)$ и $p_2(N)$ — невырожденные непрерывные нормированные планы размещения фиксированного комплекта приборов N. Образуем выпуклую комбинацию $p(N)=$ $=(1-\alpha)p_1(N)+\alpha p_2(N)$, $0<\alpha<1$ (выпуклая комбинация понимается так же, как и в [5]). Так как матрицы $\Phi(p_1(N))$, $\Phi(p_2(N))$ положительно определенные, то с помощью соотношения, приведенного в [5], получим

$$\Phi^{-1}(p(N))\leqslant(1-\alpha)\Phi^{-1}(p_1(N))+\alpha\Phi^{-1}(p_2(N)). \qquad (16)$$

Здесь использовано стандартное обозначение: $A\geqslant B$ означает, что матрица $(A-B)\geqslant 0$ неотрицательно определенная.

Далее воспользуемся тем свойством, что если матрица $A\geqslant 0$, а C — матрица соответствующей размерности, то $C^{+}AC\geqslant 0$.

Из (16) имеем

$$F^{+}(t)\Phi^{-1}(p(N))F(t)\leqslant(1-\alpha)F^{+}(t)\Phi^{-1}(p_1(N))F(t)+\alpha F^{+}(t)\Phi^{-1}(p_2(N))F(t).$$

С учетом (3) последнее неравенство запишется в виде

$$d(t,\ p(N))\leqslant(1-\alpha)d(t,\ p_1(N))+\alpha d(t,\ p_2(N)). \qquad (17)$$

По условию задачи ранг матрицы $F(t)$ равен порядку матрицы

$\Phi(\cdot)$ (равному размерности θ). Поэтому при невырожденных планах $p_1(N)$, $p_2(N)$ все три матрицы $d(\cdot)$ в (17) положительно определенные. Следовательно, из (17) вытекает арифметическое неравенство для диагональных элементов:

$$d_{ii}(t,\ p(N)) \leqslant (1-\alpha)\, d_{ii}(t,\ p_1(N)) + \alpha d_{ii}(t,\ p_2(N)).$$

Отсюда

$\mathrm{Sp}A \leqslant \mathrm{Sp}B$ для матриц $A \leqslant B$ вытекает справедливость утверждения и для функционала (12). Доказательство закончено.

Последнее утверждение относит задачи «долевого» размещения измерительных приборов к классу экстремальных задач теории эксперимента [5], по крайней мере, в тех случаях, когда для всех $l=\overline{1,\ L}$, $t=\overline{1,\ T}$ матрицы $A_l(t,\ z)$ и $G_l(\bar{x}(t),\ z)$ непрерывны по $z \in X$, а область размещения X компактна (в этих случаях множество всех информационных матриц, порождаемое невырожденными непрерывными нормированными планами, выпукло и замкнуто). Следовательно, при численном решении может быть использован алгоритм и программа, разработанные и апробированные в [5] (см. также [6] для конечного числа допустимых точек размещения). Необходимо лишь внести небольшие изменения, обусловленные более общим определением непрерывного нормированного плана, которое сформулировано выше.

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть перенесены и на некоторые другие случаи определения функции $\psi(\cdot)$, характеризующей неточность статистической оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беседин Б. А.** Оптимальные информационно-измерительные системы. Новосибирск: изд. ИМ СО АН СССР, 1973.
2. **Абдулаев Ш.-С. О., Беседин Б. А.** О синтезе оптимальных фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем.— Автометрия, 1974, № 2.
3. **Абдулаев Ш.-С. О., Беседин Б. А., Идрисов Р. Ф.** Об оптимальном размещении измерительных приборов двух типов.— Автометрия, 1978, № 6.
4. **Аоки М.** Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971.
5. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
6. **Денисов В. И.** Математическое обеспечение системы ЭВМ — экспериментатор. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 17 октября 1979 г.;
окончательный вариант — 2 декабря 1980 г.

УДК 618.2.088

В. Б. ИЛЮШИН, Ю. В. СОЛОДЯННИКОВ
(Куйбышев)

К ЗАДАЧЕ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ

Введение. Расчет суммарной случайной погрешности методов и средств измерений может быть проведен на основе построения распределения вероятностей суммы независимых случайных величин (СВ) [1]. Как известно, распределение $p_{(m)}(x)$ суммы $\beta_{(m)}$ есть свертка распреде-