Решающее правило — переходы с наименьшими временными интервалами — определяется формулой (1).

Состояние a_2 имеет два возможных перехода. Плотность распределения интервала времени перехода из состояния a_2

$$\omega_2^*(z) = \omega_{23}^*(z) + \omega_{21}^*(z).$$

Здесь $\omega_{23}^* = \omega_{23}(z)[1 - F_{21}(z)]$ принимает значение

$$\omega_{23}^* = \frac{\rho_{23}^3 z^2}{2} e^{-\rho_{23}z}\left(1 + \rho_{21}z + \frac{\rho_{21}^2 z^2}{2}\right) e^{-\rho_{21}z}.$$

Средняя величина интервала времени перехода

$$z_{23}^* = \frac{\rho_{23}^3}{\varkappa^4}\left(3 + \frac{12\rho_{21}}{\varkappa} + \frac{30\rho_{21}^2}{\varkappa^2}\right),$$

где $\varkappa = \rho_{21} + \rho_{23}$.

Аналогично $z_{21}^* = \dfrac{\rho_{21}^3}{\varkappa^4}\left(3 + \dfrac{12\rho_{23}}{\varkappa} + \dfrac{30\rho_{23}^2}{\varkappa^2}\right)$. Среднее значение числа переходов из состояния a_2 $\lambda_2^* = 1/(z_{23}^* + z_{21}^*)$, а отношение средних величин задается формулой $\lambda_{21}/\lambda_{23} = z_{23}^*/z_{21}^*$ при $\lambda_2^* = \lambda_{21} + \lambda_{23}$. Отсюда находим λ_{21} и λ_{23}.

Переходы из состояний a_1 и a_3 имеют средние величины числа переходов λ_{12} и λ_{32}, определяемые аналогично.

Перейдя ко второму этапу расчетов, составляем уравнения «статистического равновесия»:

$$\begin{cases} \lambda_{21}P_2 = \lambda_{12}P_1, \\ \lambda_{23}P_2 = \lambda_{32}P_3, \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему уравнений (5), получим искомые вероятности состояний системы:

$$P_1 = \lambda_{32}\lambda_{21}/N,$$
$$P_2 = \lambda_{12}\lambda_{32}/N,$$
$$P_3 = \lambda_{12}\lambda_{23}/N,$$

где $N = \lambda_{32}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{23}$, а λ_{12}, λ_{21}, λ_{32}, λ_{23} — известные величины, определенные на предыдущем этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джейсуол Н.** Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973.
2. **Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н.** Лекции по теории сложных систем. М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 5 февраля 1979 г.;
окончательный вариант — 15 августа 1979 г.

УДК 517.948.32

Н. Н. КОЗЛОВ

(Киев)

ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение. Многие задачи оценивания в измерительно-информационных системах сводятся к решению матричных интегральных уравнений Винера — Хопфа [1]. Наиболее простой вид этих уравнений

$$h(t)+\int_0^\infty h(\tau)K_1(t-\tau)\,d\tau=K_2(t),\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

где $K_i(t)_{i=1,2}$ — известные, а $h(t)$ — искомая функции, впервые встретился в 1894 г. в астрофизике и с тех пор подвергся всестороннему изучению многими авторами [2]. Значительно менее исследована нестационарная версия уравнения

$$\int_0^t h(t,\tau)K(\tau,\sigma)\,d\tau=F(t,\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant t\leqslant T\leqslant+\infty; \tag{2}$$

$K(\tau,\sigma)$ и $F(t,\sigma)$ — известные матрицы-функции [1].

Одна из основных трудностей в изучении (2) состоит в том, что при достаточно естественных ограничениях на $K(\tau,\sigma)$ и $F(t,\sigma)$, возникающих из вероятностных соображений, для широкого класса уравнений решение $h(t,\sigma)$ не удается записать в замкнутой аналитической форме. Это важная задача как в теоретическом, так и в практическом отношении. Для решения задач оценивания, сводящихся к (2), в последние годы применялись методы, основанные на разложении случайных процессов в ряды (так называемые канонические разложения) [3]. Однако эти приемы нельзя применить к вновь поступившим наблюдениям непосредственно: необходимо предварительно получить соответствующее новое каноническое разложение.

В работе [4] это неудобство преодолено за счет использования разложения Карунена — Лоэва. Основной практический недостаток этого подхода состоит в необходимости вычисления собственных функций. В случае когда ядро $K(\tau,\sigma)$ содержит невырожденное аддитивное слагаемое в виде δ-функции Дирака, разложение по неортогональной системе величин применено в [5].

Значительный практический интерес представляет ситуация, когда не все элементы матрицы $K(\tau,\sigma)$ обладают слагаемыми в виде δ-функции. В задачах оценивания к данному случаю сводятся неравноточные наблюдения, когда ряд параметров наблюдаемого объекта определяется со значительно более высокой степенью точности, чем остальные (например, комбинация оптических и радиолокационных измерений). Тогда более точные измерения можно считать «абсолютно» точными (по сравнению с более грубыми), и математическая модель наблюдаемого процесса будет содержать аддитивную помеху в виде вырожденного «белого» гауссового шума («цветной» шум). Кроме того, аддитивная помеха может обладать корреляционной матрицей-функцией с интегрируемыми с квадратом элементами (случай «чисто цветного» шума). В этом случае ядро $K(\tau,\sigma)$ не будет содержать δ-функции. Для численного решения интегральных уравнений такого вида в последние годы применяется, как известно, метод регуляризации Тихонова [6, 7]. Однако он не дает возможности непосредственно найти решение исходного уравнения в замкнутой аналитической форме в достаточно общей ситуации.

Целью данной работы является рассмотрение уравнения (2) в случае «цветного» шума в наблюдениях. Исходная задача аппроксимируется последовательностью задач, которые допускают простое по виду решение в замкнутой аналитической форме. Полученные вспомогательные импульсные переходные функции позволяют построить оценивающую систему, дающую сколь угодно точную линейную оценку (в среднеквадратическом смысле) оцениваемого процесса. Причем все вычисления при построении «субоптимального» линейного фильтра осуществляются на основании только априорной информации. Отметим еще одну трудность: в данной ситуации уравнение (2) может вообще не иметь интегрируемого с квадратом решения $h(t,\tau)$, в чем легко убедиться на примерах. А это означает, что оптимальной линейной оценки (в среднеквадратическом смысле) может не существовать. Тем не менее указанный подход позволяет получить аппроксимирующую последовательность субоптимальных оценок (в среднеквадратическом смысле).

Постановка задачи. Пусть наблюдается m-мерный случайный процесс

$$r(\tau) = G(\tau)x(\tau) + v(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty,$$

где $G(\tau)$ — заданная детерминированная матрица порядка $(m \times n)$; $x(\tau)$ — n-мерный гауссовый полезный сигнал; $v(\tau)$ — m-мерный гауссовый шум (с нулевым средним и известной корреляционной матрицей).

Предположим, что исходные данные таковы, что все элементы корреляционной матрицы $K(\tau, \sigma) = K_r(\tau, \sigma)$ порядка $(m \times m)$ случайного процесса $r(\tau)$ принадлежат гильбертову пространству $L_2([0, T] \times [0, T])$ интегрируемых с квадратом по Лебегу вещественных функций, определенных на $[0, T] \times [0, T]$. Пусть последнему условию удовлетворяют также все элементы взаимной корреляционной матрицы $F(t, \sigma) = K_{xr}(t, \sigma)$ порядка $(n \times m)$ процессов $x(t)$, $r(\sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant t \leqslant T$, причем реализации процессов $x(t)$ и $r(\sigma)$ принадлежат пространству $C[0, T]$ непрерывных на $[0, T]$ функций и $L_2(0, T)$ (с вероятностью 1) соответственно. Обозначим

$$\widetilde{m} = \widetilde{m}(t) = \inf M \left(z, x(t) - \int_0^t h(t, \tau) r(\tau) d\tau \right)^2_{R_n}, \tag{3}$$

где z — произвольный вектор из евклидова пространства R_n, $(.,.)_{R_n}$ — скалярное произведение в R_n, M — знак математического ожидания; точная нижняя грань берется по всем матрицам-функциям $h(t, \tau)$ порядка $(n \times m)$ с элементами из $L_2[0, T]$ по переменной τ, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Задача линейной фильтрации в данном случае может быть сформулирована следующим образом. Пусть известны наблюдения $\{r(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$. Требуется найти последовательность n-мерных векторов

$$\left\{ x_k(t) = \int_0^t h_k(t, \tau) r(\tau) d\tau \right\}_{k=1}^{\infty} \tag{4}$$

с матрицами-функциями $h_k(t, \tau)$, не зависящими от z из R_n, все элементы которых при любом индексе k принадлежат $L_2[0, t]$, и такую, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} M(z, x(t) - x_k(t))^2_{R_n} = \widetilde{m}(t), \quad \forall z \in R_n. \tag{5}$$

Заметим, что классическая постановка задачи линейной оптимальной фильтрации, когда шум $v(\tau)$ является белым невырожденным, может быть сформулирована подобным образом [8]. Данная формулировка понадобилась потому, что при указанных исходных данных точная нижняя граница в (3) может не достигаться на $L_2[0, t]$, о чем уже упоминалось во введении. Если же существует оптимальная переходная матрица-функция $h_0(t, \tau)$, минимизирующая (3), то она, как известно, является решением уравнения (2).

Найдем явное аналитическое описание аппроксимирующих матриц-функций $h_k(t, \tau)$ из $L_2[0, t]$ порядка $(n \times m)$, таких, чтобы линейные оценки (4) удовлетворяли соотношению (5). Заметим, что при указанном подходе несущественно, имеется ли корреляция между процессами $x(\tau)$ и $v(\tau)$ или нет. Единственное требование — наличие корреляционных матриц $K(\tau, \sigma)$ и $F(t, \sigma)$ с указанными выше свойствами.

Решение задачи и основной результат. Выберем в $L_2[0, T]$ произвольный ортонормированный базис $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, ..., обладающий следующим свойством: для любого $t \in (0, T]$ и любого натурального N конечная система функций $\{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_N(\tau)\}$ является линейно-независимой на сегменте $[0, t]$. Этому условию удовлетворяют, например, ортонормированные в $L_2[0, T]$ многочлены Лежандра:

$$\varphi_k(\tau) = \alpha_k d^k \tau^k (\tau - T)^k / d\tau^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_k > 0$ — нормирующий множитель.

Разложим корреляционную матрицу $K_r(\tau, \sigma)$ в ряд Фурье в $L_2([0, T] \times [0, T])$:

$$K_r(\tau, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i(\tau) C_{ij} \varphi_j(\sigma).$$

Здесь $C_{ij} = \| c_{pq}^{(i,j)} \|_{p,q=\overline{1,m}}$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов $k_{pq}(\tau, \sigma)$ матрицы $K_r(\tau, \sigma)$, т. е.

$$c_{pq}^{(i,j)} = \int_0^T \int_0^T k_{p,q}(\tau, \sigma) \varphi_i(\tau) \varphi_j(\sigma) \, d\tau d\sigma.$$

Зафиксируем некоторое натуральное N и положим

$$K_{r_N}(\tau, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{N} \varphi_i(\tau) C_{ij} \varphi_j(\sigma).$$

Введем обозначения:

$$M_N^*(\tau) = \| \varphi_1(\tau) I_m, \ \varphi_2(\tau) I_m, \ldots, \varphi_N(\tau) I_m \|,$$

$$A_N = \begin{bmatrix} C_{11} C_{12} \ldots C_{1N} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ C_{N1} C_{N2} \ldots C_{NN} \end{bmatrix},$$

где I_m — m-мерная единичная матрица, а $*$ обозначает операцию транспонирования; в таком случае матрица $K_{r_N}(\tau, \sigma)$ представима в виде $K_{r_N}(\tau, \sigma) = M_N^*(\tau) A_N M_N(\sigma)$. Аналогично разложим в ряд Фурье $K_{xr}(t, \sigma)$:

$$K_{xr}(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_i(t) B_{ij} \varphi_j(\sigma),$$

$B_{ij} = \| b_{ls}^{(i,j)} \|_{l=\overline{1,n};\ s=\overline{1,m}}$ — матрица коэффициентов Фурье элементов матрицы $K_{xr}(t, \sigma)$.

Положим $K_{(xr)_N}(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{N} \varphi_i(t) B_{ij} \varphi_j(\sigma)$. Тогда

$$K_{(xr)_N}(t, \sigma) = L_N^*(t) B_N M_N(\sigma),$$

где

$$B_N \quad \begin{bmatrix} B_{11} B_{12} \ldots B_{1N} \\ B_{21} B_{22} \ldots B_{2N} \\ B_{N1} B_{N2} \ldots B_{NN} \end{bmatrix}$$

— числовая матрица порядка $(nN \times mN)$,

$$L_N^*(\sigma) = \| \varphi_1(\sigma) I_n, \ \varphi_2(\sigma) I_n, \ldots, \varphi_N(\sigma) I_n \|.$$

Рассмотрим вместо (2) «регуляризованное» интегральное уравнение второго рода с неотрицательным ядром $K_{r_N}(\tau, \sigma)$:

$$\alpha h_{\alpha,N}(t, \sigma) + \int_0^t h_{\alpha,N}(t, \tau) M_N^*(\tau) A_N M_N(\sigma) \, d\tau = L_N^*(t) B_N M_N(\sigma), \qquad (6)$$

где $\alpha > 0$ [7].

Умножим (6) справа на $M_N^*(\sigma)$ и проинтегрируем по σ от 0 до t. В результате имеем

$$\alpha \int_0^t h_{\alpha,N}(t,\sigma) M_N^*(\sigma)\, d\sigma + \int_0^t h_{\alpha,N}(t,\tau) M_N^*(\tau)\, d\tau A_N \int_0^t M_N(\sigma) M_N^*(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= L_N^*(t) B_N \int_0^t M_N(\sigma) M_N^*(\sigma)\, d\sigma. \tag{7}$$

Введем обозначение:

$$S_N(t) = \int_0^t M_N(\sigma) M_N^*(\sigma)\, d\sigma.$$

Тогда из (7) получаем интегральное уравнение

$$\int_0^t h_{\alpha,N}(t,\tau) M_N^*(\tau)\, d\tau\, [A_N S_N(t) + \alpha I_{mN}] = L_N^*(t) B_N S_N(t). \tag{8}$$

Заметим, что матрица $S_N(t)$ имеет вид

$$S_N(t) = \left\| \int_0^t \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau)\, d\tau I_m \right\|_{i,j=\overline{1,N}}.$$

В силу отмеченного выше свойства базиса $\{\varphi_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$ матрица $S_N(t)$ обладает следующими свойствами: 1) $S_N(0) = 0$; 2) $S_N(T) = I_{mN}$; 3) $S_N(t) > 0$ при $0 < t \leqslant T$. Поэтому существует $S_N^{-1}(t)$ для любого $t \in (0, T]$ и из (8) следует, что

$$\int_0^t h_{\alpha,N}(t,\tau) M_N^*(\tau)\, d\tau \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right] = L_N^*(t) B_N. \tag{9}$$

Решение $h_{\alpha,N}(t,\tau)$ уравнения (9), эквивалентного (8), будем искать в виде

$$h_{\alpha,N}(t,\tau) = 1(t-\tau) L_N^*(t) B_N Y_{\alpha,N}(t) M_N(\tau), \tag{10}$$

где

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0, & \tau > t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \tau, t \leqslant T,$$

а $Y_{\alpha,N}(t)$ — неизвестная матрица порядка $(mN \times mN)$. Выражение $h_{\alpha,N}(t,\tau)$ в форме (10) объясняется тем, что если правую часть (10) подставить в уравнение (9), то, учитывая вид матрицы $S_N(t)$, для определения $Y_{\alpha,N}(t)$ получим алгебраическое матричное уравнение

$$L_N^*(t) B_N Y_{\alpha,N}(t) S_N(t) \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right] = L_N^*(t) B_N. \tag{11}$$

Заметим, что существует обратная матрица $\left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right]^{-1}$, поскольку матрица $A_N \geqslant 0$ (по построению), а $\alpha S_N^{-1}(t) > 0$. Поэтому из (11) следует, что

$$L_N^*(t) B_N Y_{\alpha,N}(t) = L_N^*(t) B_N \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right]^{-1} S_N^{-1}(t). \tag{12}$$

Вычисляя псевдообратную матрицу $(L_N^*(t) B_N)^+$ к матрице $L_N^*(t) B_N$, находим, что

$$(L_N^*(t) B_N)^+ = (B_N^* L_N(t) L_N^*(t) B_N)^{-1} B_N^* L_N(t).$$

На основании этого главное решение (12), т. е. решение с минимальной нормой, имеет вид

$$Y_{\alpha,N}(t) = \left(B_N^* L_N(t)\, L_N^*(t)\, B_N\right)^{-1} B_N^* L_N(t)\, L_N^*(t)\, B_N \times$$
$$\times \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right] S_N^{-1}(t) = \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right]^{-1} S_N^{-1}(t).$$

Подставляя это главное решение (12) в формулу (11), окончательно получаем

$$h_{\alpha,N}(t,\tau) = 1(t-\tau)\, L_N^*(t)\, B_N \left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right]^{-1} S_N^{-1}(t)\, M_N(\tau). \quad (13)$$

Таким образом, полученная формула совместно с (4) дает приближенно-аналитическое решение поставленной задачи фильтрации. В приложении доказано, что при $\alpha \to 0$, $N \to \infty$ согласованным образом оценка на выходе полученного фильтра удовлетворяет требованию (5). Заметим, что в формуле (13) матрицы $S_N(t)$, $S_N^{-1}(t)$, $M_N(\tau)$, $L_N^*(t)$ задаются заранее на основании знания элементов базиса $\{\varphi_i(\tau)\}_{i=1}^N$. Для нахождения $h_{\alpha,N}(t,\tau)$ (при фиксированных α и N) достаточно вычислить матрицы A_N и B_N, которые находятся на основании априорной информации, и определить $\left[A_N + \alpha S_N^{-1}(t)\right]^{-1}$. Здесь важно отметить, что переход от одной реализации случайного процесса $r(\tau)$ к другой не приводит к необходимости пересчета импульсной переходной матрицы-функции в линейном фильтре.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что при согласованном стремлении параметров $\alpha \to 0$ и $N \to \infty$ линейные оценки

$$\left\{x_{\alpha,N}(t) = \int_0^t h_{\alpha,N}(t,\tau)\, r(\tau)\, d\tau\right\}_{\alpha>0,\ N=1,2,\ldots}$$

удовлетворяют соотношению (5). Для этого понадобится

Лемма. Пусть $\{A_N\}_{N=1}^\infty$ и A — действующие в некотором гильбертовом пространстве H ограниченные линейные неотрицательные ($(Ax, x)_H \geqslant 0$, $\forall x \in H$) и симметричные ($(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$, $\forall x, y \in H$) операторы. Если

$$\|A_N - A\| \equiv \sup\{\|A_N x - Ax\|_H,\quad x \in H,\quad \|x\|_H = 1\} \to 0,$$
$$\|f - f_N\|_H \to 0,\quad f_N, f \in H$$

при $N \to \infty$, то для любого положительного α последовательность $\{g_N\}_{N=1}^\infty \subset H$ решений уравнения $\alpha g_N + A_N g_N = f_N$ сходится по норме H к решению уравнения $\alpha g_0 + A g_0 = f$.

Доказательство. Отметим вначале, что операторы $\{\alpha I_H + A_N\}_{N=1}^\infty$ и $\alpha I_H + A$ обладают в H ограниченными обратными, где I_H — тождественный в H оператор. Пусть g — произвольный элемент из H. Тогда уравнение $\alpha v + A_N v = g$ можно представить в виде $\alpha v + Av - (A - A_N)v = g$. Применим оператор $\Gamma \equiv (\alpha I_H + A)^{-1}$ к обеим частям последнего уравнения. В результате получим

$$v - \Gamma(A - A_N)v = \Gamma g.$$

Значит,

$$\Gamma_N \equiv (\alpha I_H + A_N)^{-1} = [I_H - \Gamma(A - A_N)]^{-1}\Gamma.$$

Положим $B_N = \Gamma(A - A_N)$. Тогда

$$\|B_N\| \leqslant \|\Gamma\|\|A - A_N\| \to 0,\ N \to \infty.$$

Выберем N так, чтобы $\|B_N\| \leqslant 1/2$. В таком случае $\Gamma_N g = \sum_{p=0}^\infty B_N^p \Gamma g$ для любого $g \in H$. Но тогда $\Gamma_N g - \Gamma g = \sum_{p=1}^\infty B_N^p \Gamma g$, откуда

$$\|\Gamma_N g - \Gamma g\|_H \leqslant \|B_N\|\ \|\Gamma\|\ \|g\|_H / (1 - \|B_N\|) \to 0,\ N \to \infty. \quad (14)$$

Поэтому

$$\|g_N - g_0\|_H = \|\Gamma_N f_N - \Gamma f\|_H \leqslant \|\Gamma_N (f_N - f)\|_H + \|\Gamma_N f - \Gamma f\|_H \to 0$$

при $N \to \infty$ в силу (14) и того, что $\|\Gamma_N\| \leqslant 2\|\Gamma\|$. Лемма доказана.

Умножим теперь (2) и (6) слева на произвольный вектор $z \in R_n$ скалярно, $\|z\|_{R_n} = 1$. В гильбертовом пространстве $H = L_2^{(m)}[0, t]$ интегрируемых с квадратом m-мерных вектор-функций на $[0, t]$ введем линейные ограниченные неотрицательные симметричные операторы:

$$A_N g = \int_0^t g^*(\tau) K_{r_N}(\tau, \sigma)\, d\tau, \quad Ag = \int_0^t g^*(\tau) K_r(\tau, \sigma)\, d\tau.$$

Если обозначить

$$K_{N+1}(t, \sigma) = K_r(t, \sigma) - K_{r_N}(t, \sigma),$$

то для любой вектор-функции $g \in L_2^m[0, t]$ имеем

$$\|(A_N - A) g\|^2_{L_2^{(m)}[0,t]} \leqslant \|g\|^2_{L_2^{(m)}[0,t]} \int_0^T \int_0^T \|K_{N+1}(\tau, \sigma)\|^2\, d\tau d\sigma \to 0, \quad N \to \infty,$$

откуда $\|A_N - A\| \to 0$ при $N \to \infty$. Кроме того, если

$$f_N \equiv z^* K_{(xr)_N}(t, \tau), \quad f \equiv z^* K_{xr}(t, \sigma),$$

то $\|f_N - f\|_{L_2^{(m)}[0,t]} \to 0$, $N \to \infty$. Поэтому, применяя лемму, получаем

$$\|z^* h_\alpha(t, \tau) - z^* h_{\alpha,N}(t, \tau)\|_{L_2^m[0,t]} \leqslant \|z\|_{R_n} \left\{c_1 \|\Gamma_N - \Gamma\| + c_2 \|K_{xr} - K_{(xr)_N}\|_{L_2^m}\right\},$$

где $h_\alpha(t, \tau)$ — решение регуляризованного уравнения

$$\alpha h_\alpha(t, \tau) + \int_0^t h_\alpha(t, \tau) K_r(\tau, \sigma)\, d\tau = K_{xr}(t, \sigma),$$

а $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы. Отсюда

$$\mathscr{L} \equiv \sup_{\|z\|_{R_n}=1} \|z^* h_\alpha(t, \tau) - z^* h_{\alpha,N}(t, \tau)\|_{L_2^m[0,t]} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Таким образом,

$$M\left(z, \int_0^t h_\alpha(t, \tau) r(\tau)\, d\tau - x_{\alpha,N}(t)\right)^2_{R_n} \leqslant M\left[\|r(\tau)\|^2_{L_2^{(m)}[0,t]}\right] \times \\ \times \mathscr{L} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{15}$$

Кроме того, можно показать, что

$$M\left(z, x(t) - \int_0^t h_\alpha(t, \tau) r(\tau)\, d\tau\right)^2_{R_n} \to \widetilde{m}(t), \quad \alpha \to 0. \tag{16}$$

Поэтому, учитывая (15) и (16), получаем

$$M(z, x(t) - x_{\alpha,N}(t))^2_{R_N} \leqslant M\left(z, x(t) - \int_0^t h_\alpha(t, \tau) r(\tau)\, d\tau\right)^2_{R_n} \times \\ \times \left[1 + 2M\left(z, \int_0^t h_\alpha(t, \tau) r(\tau)\, d\tau - x_{\alpha,N}(t)\right)_{R_n} + M \times \right. \\ \left. \times \left(z, \int_0^t h_\alpha(t, \tau) r(\tau)\, d\tau - x_{\alpha,N}(t)\right)^2_{R_n}\right] \to 0, \quad (\alpha, N) \to (0, +\infty).$$

Итак, соотношение (5) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972.
2. **Крейн М. Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Успехи мат. наук, 1958, т. 13, № 5.
3. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Fortmann T. E., Anderson B. D. O.** On the Approximation of Optimal Realizable Linear Filters Using a Karhunen — Loeve Expansion.— IEEE Trans. Information Theory, 1973, vol. IT-19, p. 561—564.
5. **Gardner W. A.** A Simple Solution to Smoothing, Filtering and Prediction Problems Using Series Representations.— IEEE Trans. Information Theory, 1974, vol. IT-20, p. 271—274.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
7. **Диденко В. П., Козлов Н. Н.** Регуляризованный метод решения задач оценки сообщений.— ДАН, 1975, т. 222, № 5.
8. **Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.** Фильтрация и регуляризация. Киев.: изд. КГУ, 1977.

Поступила в редакцию 2 февраля 1979 г.;
окончательный вариант — 17 сентября 1980 г.

УДК 621.317.080

Б. А. БЕСЕДИН

(Омск)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И КОМПЛЕКТОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Постановка задачи. Пусть известно, что наблюдаемая траектория $x(t)$ и известная номинальная траектория $\bar{x}(t)$ принадлежат одному классу линейных относительно вектора θ гладких функций $x(t) = F^+(t)\theta$, и пусть траектория $x(t)$ находится в малой окрестности номинальной траектории $\bar{x}(t) = F^+(t)\bar{\theta}$; ранг матрицы $F(t)$ равен размерности векторов θ, $\bar{\theta}$ для любого $t = \overline{1, T}$. (Здесь и ниже знак «+» при векторах и матрицах означает их транспонирование.)

Статистическая оценка траектории $x(t)$ строится по результатам косвенных измерений приборами из списка $\mathscr{L} = (1, 2, \ldots, L)$. Измерительный прибор l-го типа ($l \in \mathscr{L}$) описывается уравнением

$$y_l = \varphi_l(x(t),\ z) + \eta_l(t), \tag{1}$$

где для каждого момента времени $t = \overline{1, T}$ вектор-столбцы $y_l(t)$ и $\eta_l(t)$ — соответственно результат и ошибка измерения в момент t; $\varphi_l(t)$ — известные дифференцируемые вектор-функции; z — координаты местоположения прибора ($z \in X$).

Предположим, что ошибки измерений $\eta_l(t)$ статистически независимы для любой тройки (l, t, t'), $t \neq t'$, и распределены нормально с нулевыми средними и корреляционными матрицами $G_l(x, z) \equiv M\left[\eta_l(t)\eta_l^+ \times \times (t) \,|\, x(t) = x, z\right]$, M — знак математического ожидания.

Определение 1. Пусть $N = (N_1, N_2, \ldots, N_L)$ — комплект приборов из списка $\mathscr{L}$, где N_l — число приборов l-го типа. Планом размещения комплекта N в заданной области X назовем совокупность $\rho(N) = (z_k, \nu_{lk}, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, L})$, где z_k — координаты k-го пункта размещения, $z_k \in X$, ν_{lk} — число приборов l-го типа в k-м пункте.