$$\sum_{s=1}^{N} \frac{n_{ss}}{\pi_s + (1-\pi_s)\rho} = n. \tag{30}$$

Оценка, вытекающая из (26), равна

$$\widehat{\rho} = \frac{\frac{k}{n} - \sum_{s=1}^{N} \pi_s^2}{1 - \sum_{s=1}^{N} \pi_s^2} \tag{31}$$

с математическим ожиданием $M[\widehat{\rho}] = \rho$ и дисперсией $D[\widehat{\rho}] = J_2^{-1}(\rho)$. В случаях (24) и (25) оценка (31) совпадает с решением (30) и обладает минимальной дисперсией $D[\widehat{\rho}] = J_1^{-1}(\rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хуанг Т., Шрейбер В., Третьяк О.** Обработка изображений.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 7, с. 17.
2. **Ольшевский В. В.** Статистические методы в гидролокации. Л.: Судостроение, 1973.
3. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
4. **Буймов А. Г., Решетников М. Т.** Модель изображения на двумерном потоке восстановления.— В кн.: Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977, вып. 2, с. 27.
5. **Буймов А. Г., Решетников М. Т.** Случайное поле Пальма.— Труды X Всесоюз. школы-семинара по статистической гидроакустике (Сухуми). Киев: изд. КПИ, 1978.
6. **Дубков А. А., Малахов А. Н.** К статистике обобщенных телеграфных сигналов.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1978, т. 21, № 1, с. 81.
7. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
8. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т. 1.

Поступила в редакцию 11 декабря 1979 г.

УДК 519.9

Е. В. БАТЫРЕВ

(Москва)

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ РЕШАЮЩИМИ ПРАВИЛАМИ ПЕРЕХОДОВ

Рассматриваются сложные системы в области состояний со случайными переходами во времени. Из каждого состояния возможно несколько конкурирующих переходов. Реально же происходит тот переход, для которого согласно решающему правилу временной интервал наименьший (наибольший).

Указанное рассмотрение справедливо для систем массового обслуживания и может использоваться, например, для решения некоторых задач с абсолютными приоритетами [1], задач оценки эффективности алгоритмических структур [2] и ряда других.

Постановка задачи. Вероятностные системы с экстремальными решающими правилами переходов заданы в области состояний $A = \{a_i\}$, $i \in M = \{1, 2, \ldots, I\}$, где I — число состояний системы с интервалами времени переходов h_{ik} из состояния a_i в состояние a_k. Интервалы времени заданы стационарными функциями распределения $F_{ik}(z)$. Из состояния a_i существует некоторое множество $M_i \subseteq M$ переходов с временными интервалами h_{ik}. Реально переход происходит в состояние a_r, для которого

$$h_{ir} = \inf_{\forall k \in M_i} h_{ik} \tag{1}$$

или

$$h_{ir} = \sup_{\forall k \in M_i} h_{ik}. \tag{2}$$

Т. е. в системе определено множество R реальных переходов, задаваемых соотношением

$$R^{(1)} = \left\{a_r \| a_r \in A,\ h_{ir} = \inf_{\forall k \in M_i} h_{ik},\ \forall i \in M\right\}$$

или

$$R^{(2)} = \left\{a_r \| a_r \in A,\ h_{ir} = \sup_{\forall k \in M_i} h_{ik},\ \forall i \in M\right\}.$$

Требуется определить вероятности состояний данной системы.

Решение задачи. Задача решается в два этапа:

1) преобразование функций распределения интервалов времени функционально зависимых переходов согласно решающим правилам;

2) определение вероятностей состояний системы с независимыми переходами.

Этап 1. Рассмотрим систему с решающим правилом перехода, определяемым формулой (1). Интервалы времени h_{ik} возможных переходов из состояния a_i в состояния a_k имеют функции распределения $F_{ik}(z)$, $\forall a_i \in A$, $\forall k \in M_i$.

Переход из состояния a_i происходит с вероятностью

$$F_i(z) = 1 - \prod_{\forall k \in M_i} [1 - F_{ik}(z)].$$

Соответствующая плотность распределения имеет вид

$$\omega_i^*(z) = \sum_{\forall k \in M_i} \omega_{ik}(z) \prod_{\substack{\forall m \in M_i \\ m \neq k}} [1 - F_{im}(z)]$$

и равна сумме плотностей распределения интервалов $\omega_{ik}(z)$ каждого возможного перехода с переменным коэффициентом, учитывающим влияние других возможных переходов из данного состояния.

Средняя величина z_i^* интервала перехода из состояния a_i равна сумме, в которой каждое слагаемое z_{ik}^* есть среднее взвешенное значение интервала времени h_{ik}, соответствующего переходу в состояние a_k:

$$z_i^* = \sum_{\forall k \in M_i} z_{ik}^*.$$

Средняя величина числа переходов в единицу времени из состояния a_i

$$\lambda_i^* = 1/z_i^*,$$

она является суммой средних величин чисел переходов в состояния a_j:

$$\lambda_i^* = \sum_{\forall j \in M_i} \lambda_{ij}.$$

Отношения средних величин чисел переходов из a_i в a_k и из a_i в a_j обратно пропорциональны средним величинам интервалов времени этих переходов:

$$\lambda_{ij}/\lambda_{ik} = z_{ik}^*/z_{ij}^*$$

или

$$\lambda_{ij} z_{ij}^* = \lambda_{ik} z_{ik}^*, \quad \forall j, k \in M_i.$$

Решая эти линейно-независимые уравнения (их число равно $|M_i|-1$) при условии $\lambda_i=\sum\limits_{\forall j\in M_i}\lambda_{ij}$, получим средние величины λ_{ik}, $\forall k\in M_i$.

Этап 2. Определение вероятностей состояний системы с независимыми переходами. Уравнения вероятностей состояний системы составляются из условий «статистического равновесия», которое означает, что число переходов в каждое состояние a_i равно числу переходов из данного состояния. Эти условия соответствуют эргодическим системам и широко применяются в теории массового обслуживания.

Если средняя величина числа переходов из состояния a_j в a_i в единицу времени равна λ_{ji} по всем M_i' возможным переходам в состояние a_i, а λ_{ik} — среднее число переходов в единицу времени из состояния a_i, то уравнения «статистического равновесия» имеют вид

$$\sum_{\forall j\in M_i'}\lambda_{ji}\Delta t_j=\sum_{\forall k\in M_i}\lambda_{ik}\Delta t_i,\quad \forall i\in M,$$

где Δt_j, Δt_i — среднее время пребывания в состояниях a_j и a_i соответственно.

Поделив обе части уравнения на величину периода T, равного

$$T=\sum_{\forall n\in M}\Delta t_n,$$

получим нормированные уравнения с переменными, которые считаем вероятностями состояний данной системы:

$$\sum_{\forall j\in M_i'}\lambda_{ji}P_j=\sum_{\forall k\in M_i}\lambda_{ik}P_i,\quad \forall i\in M, \tag{3}$$

при условии нормировки

$$\sum_{\forall n\in M}P_n=1. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (3) при условии (4), находим искомые вероятности P_n, $\forall n\in M$.

Аналогично решается задача с решающим правилом, определяемым по формуле (2). Различие заключается лишь в том, что переход из состояния a_i происходит с вероятностью

$$F_i(z)=\prod_{\forall k\in M_i}F_{ik}(z),$$

а соответствующая плотность распределения $\omega_i^*(z)$ имеет вид

$$\omega_i^*(z)=\sum_{\forall k\in M_i}\omega_{ik}(z)\prod_{\substack{\forall m\in M_i\\ m\neq k}}F_{im}(z).$$

Дальнейшие расчеты аналогичны.

Пример. Рассмотрим систему, имеющую три состояния $A=\{a_i\}$, $i\in M=\{1,\ 2,\ 3\}$, и переходы $M_1=\{2\}$, $M_2=\{1,\ 3\}$, $M_3=\{2\}$ с временными интервалами переходов h_{ij}, $\forall i\in M$, $\forall j\in M_i$ соответственно. Функции распределения временных интервалов переходов

$$F_{ij}(z)=1-\left(1+\rho_{ij}z+\frac{\rho_{ij}^2z^2}{2}\right)e^{-\rho_{ij}z},$$

где $\rho_{ij}=3h_{ij}$.

Плотности их распределения соответственно равны

$$\omega_{ij}(z)=\frac{\rho_{ij}^3z^2}{2}e^{-\rho_{ij}z},\quad \forall i\in M,\quad \forall j\in M_i.$$

Решающее правило — переходы с наименьшими временными интервалами — определяется формулой (1).

Состояние a_2 имеет два возможных перехода. Плотность распределения интервала времени перехода из состояния a_2

$$\omega_2^*(z) = \omega_{23}^*(z) + \omega_{21}^*(z).$$

Здесь $\omega_{23}^* = \omega_{23}(z)[1 - F_{21}(z)]$ принимает значение

$$\omega_{23}^* = \frac{\rho_{23}^3 z^2}{2} e^{-\rho_{23} z} \left(1 + \rho_{21} z + \frac{\rho_{21}^2 z^2}{2}\right) e^{-\rho_{21} z}.$$

Средняя величина интервала времени перехода

$$z_{23}^* = \frac{\rho_{23}^3}{\varkappa^4}\left(3 + \frac{12\rho_{21}}{\varkappa} + \frac{30\rho_{21}^2}{\varkappa^2}\right),$$

где $\varkappa = \rho_{21} + \rho_{23}$.

Аналогично $z_{21}^* = \frac{\rho_{21}^3}{\varkappa^4}\left(3 + \frac{12\rho_{23}}{\varkappa} + \frac{30\rho_{23}^2}{\varkappa^2}\right)$. Среднее значение числа переходов из состояния a_2 $\lambda_2^* = 1/(z_{23}^* + z_{21}^*)$, а отношение средних величин задается формулой $\lambda_{21}/\lambda_{23} = z_{23}^*/z_{21}^*$ при $\lambda_2^* = \lambda_{21} + \lambda_{23}$. Отсюда находим λ_{21} и λ_{23}.

Переходы из состояний a_1 и a_3 имеют средние величины числа переходов λ_{12} и λ_{32}, определяемые аналогично.

Перейдя ко второму этапу расчетов, составляем уравнения «статистического равновесия»:

$$\begin{cases} \lambda_{21} P_2 = \lambda_{12} P_1, \\ \lambda_{23} P_2 = \lambda_{32} P_3, \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему уравнений (5), получим искомые вероятности состояний системы:

$$P_1 = \lambda_{32}\lambda_{21}/N,$$
$$P_2 = \lambda_{12}\lambda_{32}/N,$$
$$P_3 = \lambda_{12}\lambda_{23}/N,$$

где $N = \lambda_{32}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{23}$, а λ_{12}, λ_{21}, λ_{32}, λ_{23} — известные величины, определенные на предыдущем этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джейсуол Н.** Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973.
2. **Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н.** Лекции по теории сложных систем. М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 5 февраля 1979 г.;
окончательный вариант — 15 августа 1979 г.

УДК 517.948.32

Н. Н. КОЗЛОВ

(Киев)

ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение. Многие задачи оценивания в измерительно-информационных системах сводятся к решению матричных интегральных уравнений Винера — Хопфа [1]. Наиболее простой вид этих уравнений