УДК 519.219 : 53.072 : 681.3 : 519.233.22

А. Г. БУЙМОВ

(Томск)

К СТАТИСТИКЕ ПАЛЬМОВСКИХ ПОЛЕЙ

Введение. При цифровом моделировании систем, предназначенных для обработки многомерных случайных полей (яркостные поля плоских изображений [1], температурные и другие поля атмосферы, океана и т. п. [2]), возникает необходимость машинной имитации тестовых сигналов в виде числовых полей с заданными спектральными и вероятностными свойствами. Одним из возможных подходов к решению этой задачи является подход, основанный на обобщении модели телеграфного сигнала [3] на двумерный [4] и трехмерный [5] случаи. Неоднородности генерируемых полей порождаются потоками восстановления и представляют собой прямоугольные параллелепипеды, значения поля внутри которых постоянны и не зависят от значений поля в других параллелепипедах. Корреляционные функции таких полей и свойства порождающих потоков связаны формулами Пальма. Поэтому авторы работы [5] предложили для краткости называть их пальмовскими полями. Основной особенностью полей Пальма является возможность независимого управления их вероятностными и спектральными свойствами. Другие особенности связаны с ограничениями класса корреляционных функций и спецификой реакции на нелинейные преобразования. Изучение этих особенностей, исследование свойств наблюдаемых потоков изменения значений поля, потоков пересечения пороговых уровней и анализ максимально правдоподобных оценок параметров поля составляет основное содержание предлагаемой статьи. Рассматривается также случай наложения полей. Указываются пределы применимости пальмовских полей при моделировании систем.

Вероятностное описание. Пусть x_{ijk} — тензорное представление генерируемого поля; g_s — упорядоченный набор возможных значений поля; $\pi_s = \Pr(x_{ijk} = g_s)$ — одномерное распределение вероятностей; $\pi_{st}(u) = \Pr(x_{ijk} = g_s,\ x_{lmn} = g_t/u)$ — условное двумерное распределение; u — случайная величина, равная 0, если между точками ijk и lmn значение поля не меняется, или 1 в противном случае и распределенная по закону

$$\rho(ijk,\ lmn) = \Pr(u = 0),$$
$$1 - \rho(ijk,\ lmn) = \Pr(u = 1).$$

Пусть далее распределение $\pi_{st}(u)$ имеет вид

$$\pi_{st}(u) = \begin{cases} \pi_s\delta_{st}, & \text{если } u = 0; \\ \pi_s\pi_t, & \text{если } u = 1, \end{cases}$$

т. е. при изменениях поля между ijk и lmn значения $x_{ijk} = g_s$ и $x_{lmn} = g_t$ выбираются из g_s независимо. Тогда безусловное двумерное распределение генерируемого поля равно

$$\pi_{st} = \pi_s(\pi_t + (\delta_{st} - \pi_t)\rho). \qquad (1)$$

Если порождающие потоки стационарны и независимы, вероятность $\rho = \rho(ijk,\ lmn)$, входящая в (1), зависит лишь от расстояний $\tau_1 = |l - i|$, $\tau_2 = |m - j|$, $\tau_3 = |n - k|$ и факторизуется:

$$\rho = \rho_1(\tau_1)\rho_2(\tau_2)\rho_3(\tau_3). \qquad (2)$$

Вероятности $\rho(\tau)$, функции $F(\tau)$ и плотности $w(\tau)$ распределения межимпульсных расстояний потоков восстановления связаны формулами Пальма [3]:

$$\rho(\tau) = 1 - \frac{\int\limits_0^\tau [1 - F(z)]\,dz}{\int\limits_0^\infty [1 - F(z)]\,dz},$$

$$F(\tau) = 1 + \lambda^{-1}\dot{\rho}(\tau), \quad w(\tau) = \lambda^{-1}\ddot{\rho}(\tau), \quad \lambda = -\dot{\rho}(0). \tag{3}$$

На основании свойств вероятностей, их распределений и формул (3) можно заключить, что вероятности $\rho(\tau)$ потоков восстановления удовлетворяют условиям

$$1 \geqslant \rho(\tau) \geqslant 0, \ \dot{\rho}(\tau) \leqslant 0, \ \ddot{\rho}(\tau) \geqslant 0, \tag{4}$$

т. е. образуют класс неотрицательных невозрастающих выпуклых функций.

Формулы (1) — (4) представляют собой вероятностное описание модели случайного поля, которое в [5] предложено называть пальмовским полем.

Вычисляя первые и вторые моменты распределения (1), можно показать, что нормированная корреляционная функция поля не зависит от его одномерного распределения и полностью совпадает с вероятностью ρ. Этот результат совместно с формулой (1) позволяет отметить, что в поле Пальма независимость и некоррелированность флуктуаций эквивалентны, и подчеркнуть возможность независимого управления его вероятностными и корреляционными свойствами.

Распределение поля на выходе пороговых устройств. Пусть некоторое пороговое устройство преобразует значения поля x_{ijk} так, что на выходе устройства

$$x'_{ijk} = \begin{cases} g_s, & \text{если } x_{ijk} = g_s, \quad s > r; \\ g_r, & \text{если } x_{ijk} = g_s, \quad s \leqslant r, \end{cases} \tag{5}$$

где $g_r \in (g_s,\ s = \overline{1, N})$ — пороговый уровень. В этом случае суммированием вероятностей π_s и π_{st} по областям $s,\ t \in (\overline{1, r})$ можно показать, что одномерное распределение поля (5) будет иметь вид

$$\pi'_s = \begin{cases} \pi_s, & \text{если } s > r; \\ \sum\limits_{t \leqslant r} \pi_t, & \text{если } s = r, \end{cases} \tag{6}$$

а двумерное —

$$\pi'_{st} = \pi'_s\left(\pi'_t + \left(\delta_{st} - \pi'_t\right)\rho\right), \quad s, t \in (\overline{r, N}). \tag{7}$$

Теперь пусть ограничитель с двумя порогами $g_r,\ g_{r+1} \in (g_s,\ s = \overline{1, N})$ переводит исходное поле x_{ijk} в бинарную форму:

$$x''_{ijk} = \begin{cases} g_{r+1}, & \text{если } x_{ijk} = g_s, \quad s > r; \\ g_r, & \text{если } x_{ijk} = g_s, \quad s \leqslant r. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда по аналогии с (6) и (7) для одномерного и двумерного распределений поля (8) получим

$$\pi''_s = \begin{cases} \sum\limits_{t > r} \pi_t, & \text{если } s = r + 1; \\ \sum\limits_{t \leqslant r} \pi_t, & \text{если } s = r; \end{cases} \tag{9}$$

$$\pi''_{st} = \pi''_s\left(\pi''_t + \left(\delta_{st} - \pi''_t\right)\rho\right), \quad s, t \in (r, r + 1). \tag{10}$$

Из формул (6), (9) и (1), (7), (10) видно, что пороговые устройства типа (5), (8) искажают только одномерное распределение поля Пальма.

Структура двумерного распределения и нормированная корреляционная функция остаются без изменений (впервые такой эффект замечен в [6]).

Наблюдаемые распределения порождающих потоков. Из описания способа построения пальмовских полей следует, что значения поля в двух или более соседних ячейках могут принимать одинаковые значения. При этом границы между ячейками наблюдаться не будут, и можно говорить о «потере» импульсов порождающих потоков.

Полная вероятность потери k импульсов на интервале $(0, \tau)$ зависит от распределения π_s и равна $\sum_s \pi_s^{k+1}$. Поэтому функция Пальма наблюдаемого потока для интервала $(0, \tau)$ имеет вид

$$\psi(\tau) = \sum_s \sum_{k=0}^{\infty} \pi_s^{k+1} \varphi_k(\tau), \tag{11}$$

где $\varphi_k(\tau)$ — функции Пальма — Хинчина порождающего потока.

Из формул, связывающих функции Пальма — Хинчина с распределениями сумм независимых межимпульсных интервалов потоков восстановления [3], можно получить

$$\dot{\varphi}_k(\tau) = \{-\dot{\varphi}_0(\tau)\}^{(k-1)*} - \{-\dot{\varphi}_0(\tau)\}^{k*}, \; k \geqslant 1,$$

где $k*$ — k-кратная свертка, и поскольку

$$w(\tau) = -\dot{\varphi}_0(\tau), \tag{12}$$

то

$$\dot{\varphi}_k(\tau) = \{w(\tau)\}^{(k-1)*} - \{w(\tau)\}^{k*}, \; k \geqslant 1. \tag{13}$$

Дифференцируя (11) по τ и подставляя его в полученное выражение (13), с учетом соотношения (12) будем иметь формулу для вычисления плотности распределения $f(\tau)$ межимпульсных расстояний наблюдаемого потока:

$$f(\tau) = w(\tau) + \sum_s \sum_{k=1}^{\infty} \pi_s^{k+1} \left(\{w(\tau)\}^{k*} - \{w(\tau)\}^{(k-1)*}\right). \tag{14}$$

Из (14) следует, что математическое ожидание m и дисперсия σ^2 распределения $f(\tau)$ связаны с соответствующими параметрами m_0 и σ_0^2 распределения $w(\tau)$ соотношениями

$$\begin{aligned} m &= m_0 \sum_s \frac{\pi_s}{1-\pi_s}, \\ \sigma^2 &= \sigma_0^2 \sum_s \frac{\pi_s}{1-\pi_s}. \end{aligned} \tag{15}$$

Сумма, входящая в (15), не может быть меньше единицы, и, значит, при любых законах распределения π_s параметры m и σ^2 межимпульсных расстояний наблюдаемых потоков и соответствующие параметры порождающих потоков удовлетворяют неравенствам $m \geqslant m_0$, $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$. Различия между ними будут малы лишь при большом числе возможных значений поля, когда $\pi_s \ll 1$ и величина суммы в (15) близка к единице.

Полученные результаты можно использовать для исследования потоков пересечения различных пороговых уровней $g_r \in (g_s, \; s = \overline{1,N})$. Для этого достаточно в формулы (11), (14), (15) вместо π_s подставить распределение (9), для удобства переписанное в виде

$$\begin{aligned} p_r &= \sum_{t>r} \pi_t, \\ q_r &= \sum_{t<r} \pi_t, \end{aligned} \tag{16}$$

распределения π_s. Таким образом, для любых пороговых уровней $m \geqslant 2m_0$, $\sigma^2 \geqslant 2\sigma_0^2$.

Суммирование пальмовских полей. Рассмотрим вероятностные и корреляционные свойства поля, полученного суммированием независимых пальмовских полей. Для этого обозначим

$$\theta(v) = \sum_s e^{vs}\pi_s,$$

$$\Psi(v_1, v_2) = \sum_s \sum_t e^{v_1 s + v_2 t}\pi_{st} \tag{17}$$

— производящие функции одномерного π_s и двумерного π_{st} распределений, и с учетом формулы (1) получим для пальмовского поля

$$\Psi(v_1,\ v_2) = (1-\rho)\theta(v_1)\theta(v_2) + \rho\theta(v_1+v_2). \tag{18}$$

Тогда для суммы n независимых полей будем иметь производящую функцию

$$\Omega(v_1, v_2) = \prod_{i=1}^{n} [(1-\rho_i)\,\theta_i(v_1)\,\theta_i(v_2) + \rho_i\theta_i(v_1+v_2)]. \tag{19}$$

Функция (19) в общем случае к виду (18) не приводится. Следовательно, суммарное поле не будет полем Пальма.

Теперь рассмотрим (19), ограничиваясь рамками корреляционной теории. Для этого достаточно провести анализ производящей функции в малой окрестности точки $v_1 = v_2 = 0$, сохраняя члены разложения не выше второго порядка малости. В таком приближении (18) принимает вид

$$\Psi(v_1,\ v_2) \simeq \theta(v_1)\theta(v_2) + Rv_1v_2 \simeq \theta(v_1)\theta(v_2)(1+Rv_1v_2), \tag{20}$$

а (19) —

$$\Omega(v_1, v_2) \simeq \prod_{i=1}^{n} \theta_i(v_1)\,\theta_i(v_2)\left(1 + v_1v_2\sum_{i=1}^{n} R_i\right), \tag{21}$$

где R_i — ковариационные функции суммируемых полей. Из сравнения (20) и (21) видно, что если оставаться в рамках корреляционной теории, то можно считать, что суммарное поле ведет себя как поле Пальма с одномерной производящей функцией $\theta(v) = \prod_{i=1}^{n}\theta_i(v)$ и функцией ковариации $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Более того, в корреляционном приближении производящая функция (17) приводится к (20) при любом распределении π_{st}. Значит, во всех случаях моделирования систем, когда требуется имитировать поля, заданные только одномерными распределениями и корреляционными функциями типа (4), можно использовать генератор пальмовского поля.

Максимально правдоподобные оценки (МПО). Функция правдоподобия n-мерной однородной независимой выборки из (1) может быть представлена в виде

$$n!\prod_{st}\frac{\pi_{st}^{n_{st}}}{n_{st}!}. \tag{22}$$

Здесь n_{st} — число одинаковых пар $(g_s,\ g_t)$ из общего числа $n = \sum_{st} n_{st}$. Отсюда следует, что матрица случайных величин n_{st} представляет собой достаточную статистику для определения параметров пальмовского по-

ля, а МПО вероятностей π_{st} обладают свойствами соответствующих оце-
где $k = \sum_s n_{ss}$ — число пар (g_s, g_t) с совпадающими элементами. Из (23) видно, что достаточной статистикой для ρ является совокупность диагональных элементов матрицы (n_{st}).

При равномерном распределении

$$\pi_s = 1/N, \quad s = 1, 2, \ldots, N, \tag{24}$$

а также при выполнении условия

$$\pi_s \ll \rho/(1-\rho), \tag{25}$$

которое имеет место при большом числе уровней поля $N \gg 1$ и (или) при $\rho \simeq 1$, логарифм в первом слагаемом (23) можно вынести из-под знака суммы, и тогда достаточной статистикой для ρ становится след матрицы (n_{st}). Для сравнения информативности статистик $(n_{ss}, s = 1, 2, \ldots, N)$ и $k = \sum_s n_{ss}$ запишем функцию правдоподобия для второй статистики:

$$L_2(\rho) = k \ln \sum_s \pi_{ss} + (n-k) \ln\left(1 - \sum_s \pi_{ss}\right) \tag{26}$$

— и вычислим информацию Фишера $J_i(\rho)$ для $L_i(\rho)$, $i = 1, 2$. В результате получим

$$J_1(\rho) = \frac{n}{1-\rho} \sum_{s=1}^{N} \frac{\pi_s(1-\pi_s)}{\pi_s + (1-\pi_s)\rho},$$
$$J_2(\rho) = \frac{n}{1-\rho} \frac{1 - \sum_{s=1}^{N} \pi_s^2}{\sum_{s=1}^{N} \pi_s^2 + \left(1 - \sum_{s=1}^{N} \pi_s^2\right)\rho}. \tag{27}$$

Обе информации при условиях (24) и (25) совпадают. В общем случае они удовлетворяют неравенству

$$J_i(\rho) \leqslant (n/(1-\rho))((N-1)/(1+(N-1)\rho)), \quad i = 1, 2, \tag{28}$$

которое при распределении (24) обращается в равенство. Правая часть (28) с увеличением N монотонно растет до своего наибольшего значения $n/\rho(1-\rho)$.

Применяя к (27) неравенство Иенсена [8], можно получить $J_1(\rho) \geqslant J_2(\rho)$, т. е. информативность статистики $k = \sum n_{ss}$ относительно ρ не выше информативности $(n_{ss}, s = 1, 2, \ldots, N)$. Дальнейший анализ показывает, что отношение $J_1(\rho) : J_2(\rho)$ — монотонно убывающая выпуклая функция со значениями

$$(N-1) \frac{\sum_{s=1}^{N} \pi_s^2}{1 - \sum_{s=1}^{N} \pi_s^2} \geqslant \frac{J_1(\rho)}{J_2(\rho)} \geqslant 1. \tag{29}$$

МПО коэффициента корреляции ρ, вытекающая из (23) и обладающая информативностью $J_1(\rho)$, удовлетворяет уравнению

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{n_{ss}}{\pi_s + (1-\pi_s)\rho} = n. \tag{30}$$

Оценка, вытекающая из (26), равна

$$\widehat{\rho} = \frac{\dfrac{k}{n} - \sum\limits_{s=1}^{N} \pi_s^2}{1 - \sum\limits_{s=1}^{N} \pi_s^2} \tag{31}$$

с математическим ожиданием $M[\widehat{\rho}] = \rho$ и дисперсией $D\left[\widehat{\rho}\right] = J_2^{-1}(\rho)$. В случаях (24) и (25) оценка (31) совпадает с решением (30) и обладает минимальной дисперсией $D\left[\widehat{\rho}\right] = J_1^{-1}(\rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хуанг Т., Шрейбер В., Третьяк О.** Обработка изображений.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 7, с. 17.
2. **Ольшевский В. В.** Статистические методы в гидролокации. Л.: Судостроение, 1973.
3. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
4. **Буймов А. Г., Решетников М. Т.** Модель изображения на двумерном потоке восстановления.— В кн.: Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977, вып. 2, с. 27.
5. **Буймов А. Г., Решетников М. Т.** Случайное поле Пальма.— Труды X Всесоюз. школы-семинара по статистической гидроакустике (Сухуми). Киев: изд. КПИ, 1978.
6. **Дубков А. А., Малахов А. Н.** К статистике обобщенных телеграфных сигналов.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1978, т. 21, № 1, с. 81.
7. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
8. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т. 1.

Поступила в редакцию 11 декабря 1979 г.

УДК 519.9

Е. В. БАТЫРЕВ

(Москва)

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ РЕШАЮЩИМИ ПРАВИЛАМИ ПЕРЕХОДОВ

Рассматриваются сложные системы в области состояний со случайными переходами во времени. Из каждого состояния возможно несколько конкурирующих переходов. Реально же происходит тот переход, для которого согласно решающему правилу временной интервал наименьший (наибольший).

Указанное рассмотрение справедливо для систем массового обслуживания и может использоваться, например, для решения некоторых задач с абсолютными приоритетами [1], задач оценки эффективности алгоритмических структур [2] и ряда других.

Постановка задачи. Вероятностные системы с экстремальными решающими правилами переходов заданы в области состояний $A = \{a_i\}$, $i \in M = \{1, 2, \ldots, I\}$, где I — число состояний системы с интервалами времени переходов h_{ik} из состояния a_i в состояние a_k. Интервалы времени заданы стационарными функциями распределения $F_{ik}(z)$. Из состояния a_i существует некоторое множество $M_i \subseteq M$ переходов с временными ин-