

4. Sprague R. A., Koliopoulos C. L. Time Integrating Acoustooptic Correlator.— Appl. Opt., 1976, vol. 15, N 1.
5. Есенкина Н. А. и др. Гибридная оптико-цифровая система для спектрального анализа радиосигналов.— Автометрия, 1978, № 3.

*Поступила в редакцию 28 марта 1978 г.;  
окончательный вариант — 15 мая 1979 г.*

УДК 535.42.681.3

**В. И. ГОРОДЕЦКАЯ, Т. П. КОСОБУРД, Ф. А. МАРКУС**  
(Горький)

### ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ СТРУКТУР В ОБЛАСТИ ДИФРАКЦИИ ФРЕНЕЛЯ

Задача о дифракции света на периодических структурах рассматривалась в ряде работ [1—7]. Достаточно общая постановка этой задачи может быть сформулирована следующим образом. На пути параллельного пучка когерентного света (с длиной волны  $\lambda$ ), распространяющегося вдоль оси  $z$ , расположен перпендикулярно волновому вектору транспарант длиной  $2D$ , содержащий запись сигнала с периодом  $\Lambda$ , изменяющего амплитуду или фазу проходящего света. Следует определить распределение интенсивности света в плоскости за транспарантом.

Впервые это распределение наблюдал Тальбот в 1836 г., а объяснил Рэлей в 1881 г., показав, что периодические амплитудные структуры саморепродуцируются в пространстве с периодом  $2L = 2\Lambda^2/\lambda$ . В последующих работах экспериментально и теоретически исследовались дифракционные картины в плоскостях полного восстановления (изображения Фурье) и промежутках между ними (изображения Френеля). Наиболее подробно рассматривалась дифракция на неограниченных структурах [1—4]. Учет ограничения их размеров проводился в работах [6, 7] с помощью ЭВМ. Так, в [7] для некоторых частных случаев было рассчитано число исходных элементов  $N$ , необходимых для получения хорошего качества изображений Фурье и Френеля. В данной статье сделаны теоретические оценки величины  $N$  для сигналов произвольного вида. Изучение этого вопроса основано на подходе В. А. Зверева [5].

Комплексная амплитуда плоской волны  $E_0 \exp(ikz)$ , падающей на транспарант, модулируется им и в плоскости  $z = 0$  характеризуется функцией  $E(x', 0)$ . На произвольном расстоянии  $z$  распределение поля можно представить в виде [5]

$$E(x, z) = \int_{-D}^D H(x - x', z) E(x', 0) dx'. \quad (1)$$

Здесь  $H(x, z)$  — импульсная характеристика свободного пространства [5], которая в зоне Френеля определяется приближенным выражением

$$\begin{aligned} H(x - x', z) &= \sqrt{k/2\pi iz} \exp ikz \exp [ik(x - x')^2/2z] = \\ &= C(z) \exp [ik(x - x')^2/2z]. \end{aligned} \quad (2)$$

Запись  $H(x, z)$  в виде (2) накладывает ограничения на  $z$ , но мы не будем на этом останавливаться, так как конечность длины просвечиваемой

структуры приводит к гораздо более жестким условиям на область справедливости выражения (2).

Будем считать, что исходное поле  $E(x, 0)$  в пределах записи совпадает с периодической функцией  $f(x)$ , а вне этого участка, имеющего длину  $2D$ , равно нулю. Представим  $f(x)$  с помощью ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp iKxl. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и проводя замену переменных, получим новое выражение для  $E(x, z)$ :

$$E(x, z) = C(z) \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp \left[ i \left( lKx - \frac{K^2 l^2}{2k} z \right) \right] \psi_l(x, z), \quad (4)$$

где  $C(z) = \sqrt{k/2\pi iz} \exp(ikz)$ ,

$$\psi_l(x, z) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(i\xi^2) d\xi, \quad (5)$$

$$\xi_1 = \sqrt{k/2z}(x - D - z l K/k), \quad \xi_2 = \sqrt{k/2z}(x + D - z l K/k).$$

При увеличении размера  $D$  и ограниченных значениях  $x, z$  и  $l$  функция  $\psi_l(x, z)$  (5) практически остается постоянной, начиная с некоторого значения величины  $D$ . При этом каждая гармоника поля, распространяясь в пространстве  $z > 0$ , приобретает квадратичный набег по фазе. Как показано в работе [4], в плоскостях  $z_{m,n} = (m + 1/n)\Lambda^2/\lambda$  ( $n$  — целое) за неограниченной структурой поле можно записать в виде суперпозиции  $n$  слагаемых, каждое из которых есть исходное поле, сдвинутое на долю периода  $\Lambda$  по координате  $x$ . Это представление, как будет показано ниже, сразу объясняет особенности дифракционных картин, которые приводят к появлению негативных изображений, визуализации фазовых объектов и мультипликации.

Перейдем к рассмотрению дифракции Френеля на структурах длиной  $2D$ . Для их саморепродукции существенным условием является возможность представления функции  $f(x)$  ограниченным рядом Фурье, число членов которого  $l_{\max}$  определяется наименьшим из характерных масштабов изменения поля  $\delta$ . Как известно, ширина спектра  $\Delta U$  связана с  $\delta$  соотношением  $\Delta U \geq 2\pi/\delta$ . Тогда

$$l_{\max} \geq \Delta U/K \geq \Lambda/\delta. \quad (6)$$

При выполнении неравенства (6) можно найти условия, при которых функция  $\psi_l(x, z)$  не зависит от  $x$  и одинакова для всех членов ряда (4) с номерами  $l < l_{\max}$ :

$$x_{\max} < D - z l_{\max} K/k \leq D - z\lambda/\delta, \quad (7)$$

$$z < Dk/Kl_{\max} \leq D\delta/\lambda. \quad (8)$$

Физически эти условия означают, что дифракция описывается в области пространства, где пересекаются плоские волны, вносящие существенный вклад в образование поля за транспарантом. Неравенства (7), (8) определяют особенности дифракционных явлений по сравнению с бесконечными структурами: сужение области саморепродукции по поперечной координате с ростом  $z$  и ограниченность числа наблюдаемых плоскостей восстановления исходной структуры величиной  $m_{\max}$ , которая находится из (8):

$$m_{\max} = z_{\max}/L \leq D\delta/\Lambda^2.$$

Из условий (7), (8) следует, что для саморепродукции  $N_1$  периодов сигнала их минимальное число на транспаранте должно быть больше, чем  $N_1 + 2\Lambda m/\delta$  ( $m$  — номер плоскости саморепродукции).

В зоне наблюдения, определяемой условиями (7), (8), приближенное выражение для функции  $E(x, z)$ , которое обозначим  $E^*(x, z)$ , можно записать следующим образом:

$$E^*(x, z) = \sum_{l=-l_{\max}}^{l=l_{\max}} a_l \exp \left[ ilKx - i \frac{K^2 l^2}{2k} z \right]. \quad (9)$$

Из (9) следует, что дифракционные картины в любой плоскости за транспарантом саморепродуцируются с периодом, равным  $2L = 2\Lambda^2/\lambda$ , и восстанавливаются со сдвигом на  $\Lambda/2$  при перемещении по оси  $z$  на величину  $L$ . Это связано с тем, что фазовые набег четных и нечетных гармоник в (9) отличаются на  $\pi$  при перемещении на  $L$  и кратны  $2\pi$  при сдвиге на  $2L$ .

Приближенное выражение (9) совпадает с точным для структур бесконечной длины, и его можно преобразовать к виду [4]

$$E^*(x, z_{m,n}) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{n-1} b_p E \left( x + \frac{\Lambda p}{n}, 0 \right), & m \text{ четное,} \\ \sum_{p=0}^{n-1} b_p E \left( x + \frac{\Lambda p}{n} + \frac{\Lambda}{2}, 0 \right), & m \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (10)$$

где

$$b_p = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left[ i \left( \frac{2\pi j p}{n} - \frac{j^2 \pi}{n} \right) \right]. \quad (11)$$

Перейдем к исследованию частных случаев.

Пусть исходный транспарант представляет собой пленку с черно-белым амплитудным сигналом, например таким, как показано на рисунке. Тогда, если выполняется условие

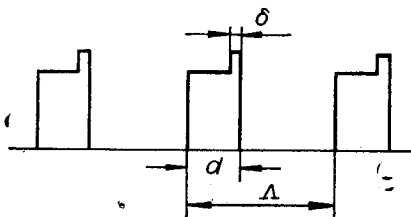
$$d < \Lambda/n, \quad (12)$$

в плоскости  $z_{m,n}$  распределение интенсивности запишется как

$$I_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \left| E \left( x + \frac{\Lambda p}{n}, 0 \right) \right|^2, & m \text{ четное,} \\ \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \left| E \left( x + \frac{\Lambda p}{n} + \frac{\Lambda}{2}, 0 \right) \right|^2, & m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (13)$$

Выражение (13) означает, что происходит мультипликация исходного сигнала.

Если (12) не выполняется, то в  $z_{m,n}$  произойдет наложение сдвинутых элементов и, складываясь с разными фазами, определяемыми коэффициентами  $b_p$  (11), они дадут сложное распределение интенсивности.



Найдем число исходных элементов  $N = 2D/\Lambda$ , необходимое для наблюдения их мультипликации на отрезке  $2|x_{\max}|$ , равном  $N_1\Lambda$ , хотя бы в одной плоскости  $z_{0,n}$ . Для этого воспользуемся неравенством (8), в которое подставим значение  $z_{0,n} = L/n$ . Тогда будем иметь  $N > N_1 + 2(m + 1/n)\Lambda/\delta$ .

Явление мультипликации для периодических структур, меняющих амплитуду поля, используется и для получения решеток высокой разрешающей силы. Дело в том, что при современных способах их создания высокая степень качества записи получается для  $M \leq 10$  штрих/мм. Фотографируя дифракционные картинки в плоскостях  $z = (m \pm 1/n)L$ , можно получить решетки с  $M' = 2M, 3M$  и т. д.

Важным условием увеличения числа объектов на периоде является отсутствие когерентного фона за просвечиваемой структурой. Покажем это на примере четных значений множителя мультипликации  $n$ , для которых легко находятся коэффициенты

$$b_p = (1/\sqrt{2n}) \exp i[\pi(1/4 + p^2/n)].$$

Если исходное поле определяется функцией  $f(x) = \tau_0 + \tau(x)$  ( $\tau_0$  — фон), то относительная интенсивность каждого элемента  $I_p$  в плоскости  $z = z_{m,n}$  при выполнении условия  $d < \Lambda/n$  запишется следующим образом:

$$I_p = \tau_0^2 + \frac{2\tau_0}{\sqrt{2n}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi p^2}{n}\right) \tau\left(x + \frac{\Lambda p}{n}\right) + \frac{\tau^2\left(x + \frac{\Lambda p}{n}\right)}{2n}.$$

При  $\tau(x) \ll \tau_0$  последним членом можно пренебречь. Тогда в наблюдаемой дифракционной картине пропадают элементы с  $p = \sqrt{n/4 + qn}$ , где  $q$  — целое число, а элементы с  $\sqrt{5n/4 + 2qn} > p > \sqrt{n/4 + 2qn}$  становятся негативными. Так, для  $n = 2$  каждый второй элемент негативный. Для  $n = 4$  два элемента на периоде исчезают, а один становится негативным. Эксперимент подтверждает изложенное.

При перемещении вдоль оси  $z$  наблюдаемая картина меняется. Характерный масштаб  $\Delta z$  этого изменения определяется расстоянием, на котором набег по фазе гармоники с максимальным номером  $l_{\max}$  увеличивается на  $\pi$ :

$$(K^2 l_{\max}^2 / k) \Delta z < \pi \text{ или } \Delta z < \delta^2 / \lambda.$$

Эта же величина задает точность настройки на нужную плоскость. Она совпадает с размером зоны геометрической оптики для минимального элемента структуры.

В том случае, когда исходный транспарант модулирует проходящий через него свет по фазе, т. е.  $f(x) = \exp[i\varphi(x)]$ , поле в  $z = z_{m,n}$  описывается также выражениями (10), а распределение интенсивности (для  $m$  четных) можно представить в виде

$$I(x, z_{m,n}) = |E(x, z_{m,n})|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} B_p^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ p < j}}^{n-1} B_p B_j \times \\ \times \cos[(\psi_p - \psi_j) + \varphi(x - \Lambda(p/n)) - \varphi(x - \Lambda(j/n))], \quad (14)$$

где  $B_p$  и  $\psi_p$  — модуль и фаза коэффициентов  $b_p$ . Для  $m$  нечетных функция  $I(x, z_{m,n})$  сдвигается по координате  $x$  на  $\Lambda/2$ .

Анализируя (14), можно показать, что в пространстве будут повторяться с периодом  $L$  дифракционные картины с равномерной освещенностью, в которых поле совпадает с исходным. Для этого нужно в (14) подставить  $n = 1$ , тогда вторая сумма обратится в нуль и останется только первая, члены которой не зависят от координаты. По расстоянию между этими плоскостями (оно равно  $L$ ) можно определить период исходного сигнала. В промежуточных значениях  $z$ , равных  $z_{m,n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ),  $I(x, z_{m,n}) \neq \text{const}$ . Это означает, что поле уже не является чисто фазовым и происходит визуализация фазового сигнала. Особенно простой формулой описывается распределение интенсивности на расстояниях  $z$  от

транспаранта, равных  $z_{m,n} = (m \pm 1/2)\Lambda^2/\lambda$ :

$$I(x, z_{m,\pm 2}) = 1 + (-1)^m \sin [\varphi(x) - \varphi(x + \Lambda/2)]. \quad (15)$$

Экспериментально эти дифракционные картины легко находятся, так как они расположены посередине между плоскостями с равномерной освещенностью. При малых глубинах модуляции формула (15) перейдет в более простую:

Итак функцию  $I(x, z_{m,\pm 2}) = 1 + (-1)^m [\varphi(x) - \varphi(x + \Lambda/2)]$  (16) и сравнить с той же зависимостью, найденной из эксперимента), а также для обнаружения периодических неоднородностей прозрачных материалов (стекло, термопластик), возникающих при их изготовлении. В сравнении с известными способами он не требует линз, экранов, фильтров, которые усложняют оптическую систему и вносят ряд систематических ошибок, связанных с дифракцией и аберрациями.

В заключение авторы выражают благодарность В. А. Звереву за интерес к работе и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Winthrop J. T., Worthington G. R. Theory of Fresnel Images. I. Plane Periodic Objects in Monochromatic Light.— JOSA, 1965, vol. 55, p. 373.
2. Денисюк Ю. Н., Рамишвили Н. М., Чавчанидзе Д. В. О возможности получения пространственных изображений двумерных объектов без помощи линз и голографии.— Опт. и спектр., 1971, т. 30, № 6.
3. Маркус Ф. А., Кособурд Т. П. Визуализация периодических амплитудных и фазовых структур и определение их параметров.— Автометрия, 1979, № 2.
4. Смирнов Ю. П. Теория формирования изображений Френеля периодических транспарантов неограниченных размеров.— Опт. и спектр., 1977, т. 43, № 4.
5. Зверев В. А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975.
6. Rogers G. L. Calculations of Intermediate Fourier Images of a Finite Line Grating on a Digital Computer, with an Application to an Unusual Case.— Brit. J. Appl. Phys., 1963, vol. 14, p. 657.
7. Смирнов А. П. Изображения Френеля периодических транспарантов конечных размеров.— Опт. и спектр., 1978, т. 44, № 2.

Поступила в редакцию 19 мая 1978 г.