УДК 517.988.8

О. Е. ТРОФИМОВ, Д. Г. ФРИЗЕН
(Новосибирск)

КОЭФФИЦИЕНТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО МЕТОДУ ЛАПЛАСА

При вычислении интегралов вида

$$\int_a^b g(t)\, e^{\lambda f(t)} dt = J(\lambda)$$

для больших значений λ часто используется метод Лапласа, основанный на асимптотическом разложении функции $J(\lambda)$ [1]:

$$J(\lambda) \sim e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \frac{(2n)!}{4^n n!}.$$

Здесь t_0 — внутренняя точка отрезка (a, b), в которой функция $f(t)$ достигает наибольшего значения на (a, b), коэффициенты c_{2n} определяются из условия $g(\psi(\tau))\psi'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n$, а функция $\psi(\tau) = t$ — из уравнения $f(t_0) - f(t) = \tau^2$. Этот прием используется также в методе перевала и методе стационарной фазы [2].

В известной нам литературе явное выражение через функции f и g встречается лишь для главного члена. В то же время для конкретных функций, например гамма-функции, приводятся обычно три-четыре члена разложения. По-видимому, это вызвано тем, что получение других коэффициентов в общем случае связано с весьма громоздкими преобразованиями. Эта работа была проделана с помощью ЭВМ. В результате получены следующие формулы (через f_i и g_i обозначены i-е производные функций f и g в точке t_0, где t_0 — точка максимума $f(t)$):

$$\int_a^b g(t)\, e^{\lambda f(t)} dt = e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left[a_0 + a_1 \frac{1}{\lambda} + a_2 \frac{1}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right],$$

где $a_0 = \psi_1$,

$$a_1 = \frac{1}{4}\left[g_2\psi_1^3 + 3g_1\psi_1\psi_2 + g_0\psi_3\right],$$

$$a_2 = \frac{1}{32}\left[g_4\psi_1^5 + 10g_3\psi_1^3\psi_2 + 10g_2\psi_1^2\psi_3 + 15g_2\psi_2^2\psi_1 + 5g_1\psi_4\psi_1 + 10g_1\psi_3\psi_2 + g_0\psi_5\right],$$

$$\psi_1 = \sqrt{2/-f_2},$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{3} f_3 f_2^{-1} \psi_1^2,$$

$$\psi_3 = \left[-\frac{1}{4} f_4 f_2^{-1} + \frac{5}{12} f_3^2 f_2^{-2}\right] \psi_1^3,$$

$$\psi_4 = \left[-\frac{1}{5} f_5 f_2^{-1} + f_4 f_3 f_2^{-2} - \frac{8}{9} f_3^3 f_2^{-3}\right] \psi_1^4,$$

$$\psi_5 = \left[-\frac{1}{6} f_6 f_2^{-1} + \frac{7}{6} f_5 f_3 f_2^{-2} + \frac{35}{48} f_4^2 f_2^{-2} + \frac{385}{144} f_3^4 f_2^{-4} - \frac{35}{8} f_4 f_3^2 f_2^{-3}\right] \psi_1^5.$$

Если $g(t) \equiv c$ (можно положить $c = 1$), то

$$a_0 = \psi_1, \quad a_1 = (1/4)\psi_3, \quad a_3 = (1/32)\psi_5.$$

Приравнивая нулю коэффициенты разложения, легко получить условия «быстрого» убывания погрешности в методе Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, с. 474.
2. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступило в редакцию 2 ноября 1979 г.