АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1981

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.3.01 : 621.38

А. С. ЗАГОРУЙКО
(Новосибирск)

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ПОРЯДКА И ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данном сообщении описываются некоторые характерные особенности построения алгоритма решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом, в основу которого положено использование формул дифференцирования в неявном виде [1]. Экспериментальная программа, реализующая рассматриваемый алгоритм, написана на языке АЛГАМС и предназначена для решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В задачи автора входили практическая проверка и отработка отдельных элементов и программных блоков для выяснения наиболее эффективной стратегии прогнозирования шага интегрирования, исследование целесообразности интегрирования с большим порядком и сравнение по эффективности данной программы с программой, реализующей метод постоянного второго порядка [2].

Полученные результаты можно использовать и при решении систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих переходные процессы нелинейных электронных схем. Для этого требуется заменить подпрограмму решения системы линейных алгебро-трансцендентных уравнений на подпрограмму решения системы нелинейных уравнений. Программные блоки интегрирования, стратегии выбора шага и порядка остаются прежними.

Исходная система линейных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B, \tag{1}$$

где $\underline{x}$ — вектор переменных размерности N; A, B — матрицы размерности $N\times N$ и $N\times 1$ соответственно. На практике к решению уравнения (1) сводится задача определения переходной характеристики линейной системы.

Воспользовавшись соотношением

$$\underline{\dot{x}_{n+1}} = -\frac{1}{H_1}\sum_{i=0}^{k-1}\bar{\alpha}_i\underline{\Delta x_{n-i}}, \tag{2}$$

можно привести (1) к системе линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{1}{H_1}\sum_{i=0}^{k}\bar{\alpha}_i\,\underline{\Delta x_{n-i}} = A\underline{x_{n+1}} + B, \tag{3}$$

где $H_1 = \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ — текущий шаг интегрирования, соответствующий каждой следующей временной точке t_{n+1}; k — порядок интегрирования, $1\leqslant k\leqslant 6$; $\bar{\alpha}_i$ — коэффициенты, зависящие от k и предыдущих шагов интегрирования; $\underline{\Delta x_{n-i}} = \underline{x_{n-i+1} - x_{n-i}}$ — вектор изменений переменных между $(n-i+1)$-й и $\overline{(n-i)}$-й временными точками.

Система (3) решается итерационным методом Зейделя. В качестве первого приближения используются прогнозируемые значения переменных:

$$\underline{x^p_{n+1}} = \underline{x_n} + \sum_{i=1}^{k}\underline{\bar{\gamma}_i\Delta x_{n-i}}. \tag{4}$$

Здесь $\bar{\gamma}_i$ — коэффициенты, зависящие от значений предыдущих шагов интегрирования и порядка k интегрирования. Точка считается вычисленной, если сумма относительных ошибок по всем переменным на порядок меньше допустимой суммарной относительной ошибки. Одновременно подсчитывается суммарное количество итераций по всем вычисляемым точкам, которое служит показателем эффективности программы при сравнении различных способов прогноза шага H_1, принятия вычисленной точки и при исследовании выбора верхнего предела порядка k.

Особенность описываемого алгоритма состоит в формировании специальной треугольной матрицы h_{ij}, i-я строка которой образуется из приращений времени между $(n-i+2)$-й и всеми предыдущими временными точками, количество которых соответствует текущему порядку интегрирования k.

После принятия очередной точки матрица (h_{ij}) обновляется путем сдвига ее элементов по диагонали на одну позицию.

Критерием принятия вычисленной точки является выполнение неравенства $1 \leqslant D_T \leqslant D_M$, в котором

$$D_T = \min_{i=(\overline{1,n})} \left[\frac{E^i h_{1,k+1}}{H_1 ABS \dfrac{x^i_{n+1} - x^{p_i}_{n+1}}{x^i_{n+1}}} \right]^{\frac{1}{k+1}},$$

где E^i — допустимая относительная ошибка по i-й переменной; D_M — задаваемая верхняя граница интервала $[1, D_M]$. Если величина D_T выходит за указанный интервал, то вычисленная точка аннулируется и осуществляется модификация шага интегрирования H_1.

В программе предусмотрены следующие эвристические способы прогнозирования шага H_1: 1) если $D_T < 1$, то $D = 0{,}5$; 2) $D = 0{,}4 + 0{,}5D_T$; 3) $D = D_T$; если $D_T > D_{MM}$, то $D = D_{MM}$, где D_{MM} — коэффициент максимально-возможного увеличения H_1 (для всех трех способов новое значение шага $H_{1н} = DH_1$); 4) если $D_T < 1$ и $D_{пр} > D_M$ или $D_T > D_M$ и $D_{пр} < 1$, то

$$H_{1н} = H_1 + (H_{1пр} - H_1)/(0{,}08 + c/8{,}5), \tag{5}$$

где $H_{1пр}$, $D_{пр}$ — значения переменных H_1 и D_T для предыдущей точки, c — вводимое целое число. Если вычисленная с новым шагом $H_{1н}$ точка опять не будет принята, то изменение шага по формуле (5) продолжается.

Проверка на изменение порядка в программе осуществляется через $L = (k_c + 1)$ точек, рассчитываемых с постоянным порядком $k = k_c$. Для этого определяются величины $D^{k_c - 1}$ и $D^{k_c + 1}$ соответственно для меньшего и большего порядков. Среди величин $D^{k_c - 1}$, D^{k_c} и $D^{k_c + 1}$ находится максимальное значение. Новое значение порядка интегрирования $k_н$ должно соответствовать этому максимуму.

Коэффициенты α в (2) и γ в (4) для уменьшенного или увеличенного по сравнению со значением k_c порядка пересчитываются через соответствующие значения этих коэффициентов для старой величины k_c и элементов матрицы h_{ij}.

Опытная эксплуатация программы при решении нескольких классов задач, соответствующих в основном моделированию переходных процессов линейных электронных R, L, C-схем без особенностей, позволила отработать ее отдельные фрагменты и блоки. Было установлено, что в среднем (если исходить из критерия суммарного количества итераций по Зейделю) вычисление по рассмотренной программе с автоматическим выбором порядка интегрирования примерно на 30% эффективнее расчета методом постоянного второго порядка [2]. С другой стороны, автоматический переход на 5-й и 6-й порядки происходит очень редко и к существенной экономии в расчетах не ведет. Этот факт позволяет утверждать, что в подобных задачах целесообразно ограничиться верхним пределом порядка $k_M = 4$.

Наиболее эффективен второй способ прогнозирования шага H_1 (когда $D = 0{,}4 + 0{,}5D_T$). При этом верхнюю границу D_M интервала принятия вычисленных точек и величину D_{MM} можно не устанавливать. Достаточно задать ограничение сверху на абсолютную величину шага интегрирования.

Безусловно, что для других классов задач должны существовать и более оптимальные способы прогнозирования шага интегрирования и выбора величины порядка. Их определение в каждом случае требует решения конкретных задач и заранее указано быть не может.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brayton R. K., Gustavson F. G., Hachtel G. D.** A New Efficient Algorithm for Solving Differential — Algebraic Systems Using Implicit Backward Differentiation Formulas.— Proc. of the IEEE, 1972, vol. 60, N 1.
2. **Shichman H.** Integration System of a Nonlinear Network Analysis Program.— IEEE Trans. on Circuit Theory, 1970, vol. CT-17, N 3.

Поступило в редакцию 30 октября 1978 г.;
окончательный вариант — 11 февраля 1980 г.