УДК 621.317.080

Р. Т. ЯКУПОВ

(Томск)

ВЫРАБОТКА ТРЕБОВАНИЙ К ТОЧНОСТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

При проектировании измерительных комплексов часто возникает задача определения требований к точностным характеристикам средств, составляющих измерительный комплекс. Задача обоснования требований к точностным характеристикам измерительных средств, используемых для получения оценок параметров состояния объекта по методу наименьших квадратов, рассматривалась в [1, 2], где предложены алгоритмы определения требований к точностным характеристикам измерительных средств, обеспечивающих максимальную в определенном смысле близость ковариационной матрицы ошибок оценивания параметров состояния объекта к некоторой заданной матрице, характеризующей требования к точности оценивания параметров состояния.

В настоящей работе рассматриваются вопросы определения требований к точностным характеристикам средств измерительного комплекса, предназначенного для наблюдения за вектором состояния линейной динамической системы. Такая задача может возникнуть в областях, связанных с управлением технологическими процессами, траекторными измерениями, навигацией и многими другими.

Динамический объект и измерительная система описываются соотношениями

$$\dot{x} = Ax + Bw, \; x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$z = Hx + Gv, \tag{2}$$

где x — n-вектор-столбец состояния; w — l-вектор-столбец возмущений; z, v — m-вектор-столбцы измерений и их шумов; A, B, H, G — матрицы соответствующих размерностей, в общем случае зависящие от времени; x_0, w и v считаются взаимно-некоррелированными гауссовскими случайными величинами с нулевыми средними:

$$M\{x_0 x_0^{\text{т}}\} = P_0 = LD_0L^{\text{т}},$$

$$M\{w(t)w^{\text{т}}(\tau)\} = Q\delta(t-\tau), \; M\{v(t)v^{\text{т}}(\tau)\} = R\delta(t-\tau).$$

Здесь $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, т — операция транспонирования. Матрицы D_0, Q и R не зависят от времени и диагональны; матрицы G и R не вырождены.

Оптимальная оценка вектора состояния x по измерениям z получается с помощью фильтра Калмана — Бьюси [3, 4], при этом точность оценивания характеризуется ковариационной матрицей ошибок фильтрации P, удовлетворяющей матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{P} = AP + PA^{\text{т}} + BQB^{\text{т}} - PH^{\text{т}}(GRG^{\text{т}})^{-1}HP, \; P(0) = P_0. \tag{3}$$

Диагональные элементы матрицы P являются дисперсиями ошибок оценивания соответствующих компонент вектора состояния x. Заметим, что предположения о диагональности и инвариантности относительно времени матриц D_0, Q и R не снижают общности постановки задачи фильтрации Калмана — Бьюси, поскольку любая симметрическая неотрицательно-определенная матрица $M(t)$ может быть представлена в виде $M(t)=C(t)KC^{\tau}(t)$, где K — диагональная матрица, не зависящая от времени.

Точностными характеристиками средств измерительного комплекса служат некоторые из диагональных элементов матриц D_0, Q и R; объединим эти элементы в вектор-столбец параметров d размерности k. Вектор d может включать в себя мощности белых шумов измерений и возмущений (элементы матриц R и Q), а также дисперсии ошибок априорных оценок компонент вектора состояния (элементы матрицы D_0).

На определенные компоненты вектора состояния x накладываются ограничения; пусть ρ обозначает вектор, состоящий из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы ошибок оценивания P. Требуется определить область Ω допустимых значений d, удовлетворяющих условию

$$\rho(T)\leqslant\rho^0. \tag{4}$$

Здесь ρ^0 — вектор, состоящий из предельно допустимых значений дисперсий ошибок оценивания соответствующих компонент вектора состояния в момент времени T. В частности, фильтры, обеспечивающие при достаточно больших t стационарный уровень, могут иметь $T=\infty$.

Область Ω в принципе может считаться заданной соотношениями (3) и (4), поскольку при каждом фиксированном d можно из (3) определить $\rho(T)$ и проверить выполнение условия (4). Однако практически пользоваться таким определением области допустимых значений d затруднительно, поэтому встает задача определения некоторой более простой и удобной для практического использования области $\widehat{\Omega}$, аппроксимирующей Ω. При аппроксимации области Ω воспользуемся следующим результатом.

Утверждение. Диагональные элементы матрицы $P(T)$ для любого фиксированного момента времени T являются вогнутыми функциями по совокупности элементов матриц D_0, Q и R.

Утверждение дополняет результаты о выпуклых свойствах решений матричных дифференциальных уравнений Риккати, полученных в [5, 6].

Доказательство утверждения приводится в приложении.

В соответствии со сформулированным выше утверждением компоненты $\rho(T)$ как функции d вогнуты, поэтому дополнительная к Ω область будет выпуклой. Пусть имеется некоторая точка d^1 на границе Ω, причем $\rho_i=\rho_i^0$; $\rho_j\leqslant\rho_j^0$ $(j\neq i)$.

Определим область

$$\Lambda=\{d:\nabla\rho_j(d^1)d\leqslant\nabla\rho_j(d^1)d^1,\ j=1,\ \ldots,\ \nu\},$$

где ν — размерность вектор-функции ρ; $\nabla\rho_j$ — вектор-строка градиента j-й компоненты вектор-функции $\rho(T)$ по d ($\nabla\rho_j$ может вычисляться различными способами, например, из (3) можно получить дифференциальные уравнения для компонент градиента; на практике удобен метод малых приращений).

Из вогнутости функций ρ_j по d следует, что $\Lambda\subseteq\Omega$.

Если известны координаты N точек на границе Ω, удовлетворяющих условиям $\rho_{i_l}=\rho_{i_l}^0$; $\rho_{j_l}\leqslant\rho_{j_l}^0$ $(j_l\neq i_l)$, где l пробегает значения от 1 до N, то можно построить N областей вида

$$\Lambda_l=\{d:\nabla\rho_j(d^l)d\leqslant\nabla\rho_j(d^l)d^l,\ j=1,\ \ldots,\ \nu\}$$

и за аппроксимацию области Ω принять объединение множеств Λ_l:

$$\widehat{\Omega}=\bigcup_{l=1}^{N}\Lambda_l.$$

Очевидно, что $\widehat{\Omega}\subseteq\Omega$, т. е. если некоторый вектор d принадлежит $\widehat{\Omega}$, то он принадлежит и области Ω.

Покажем, как можно осуществлять поиск точек на границе Ω. Выберем некоторую произвольную точку $d^0 > 0$ и будем искать точку на границе Ω в виде $d = \theta d^0$, $\theta > 0$. Решаем задачу: найти значение θ^* скалярного параметра θ, такое, чтобы точка $d = \theta^* d^0$ для некоторого i удовлетворяла условию $\rho_i = \rho_i^0$; $\rho_j \leqslant \rho_j^0 (j \neq i)$. Скаляр θ^* можно определить с помощью итерационного алгоритма типа Ньютона по следующей схеме:

1) выбираем некоторое начальное значение θ^0 (например, $\theta^0 = 1$);

2) полагаем $\theta^1 = \theta^0$;

3) вычисляем производные $\rho'(\theta d^0)$ функций $\rho_l(\theta d^0)$ $(l = 1, \ldots, \nu)$ по θ в точке θ^1 (например, с помощью метода малых приращений);

4) вычисляем следующие значения θ:

$$\theta_l^2 = \theta^1 + (\rho_l^0 - \rho_l)/\rho_l'(\theta^1 d^0)$$

— и выбираем из них такое θ_s^2, чтобы $\theta_s^2 = \min\limits_l (\theta_l^2)$;

5) если $\theta_s^2 \leqslant 0$, то полагаем $\theta^0 = \lambda\theta^0 (0 < \lambda < 1$, например, $\lambda = 0{,}5)$ и возвращаемся к п. 2;

6) условие остановки итерационной процедуры может быть, к примеру, таким: если для $\theta = \theta_s^2$ при некотором l $|\rho_l - \rho_l^0| < \varepsilon_l$ (ε_l — наперед заданное малое число, $l = 1, \ldots, \nu$), то положить $\theta^* = \theta_s^2$, иначе положить $\theta^1 = \theta_s^2$ и возвратиться к п. 3.

Поскольку $\rho_i(\theta d^0)$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ вогнуты и, кроме того, монотонны по θ (последний факт является очевидным), то сходимость описанной выше процедуры доказывается стандартным образом [7].

Выбирая различные точки d_0, не лежащие на одном луче, выходящем из начала координат, будем получать разные точки на границе Ω, по которым можно построить аппроксимирующую область $\widehat{\Omega}$. Необходимая степень приближения $\widehat{\Omega}$ к Ω, а следовательно, и выбор необходимого для аппроксимации количества граничных точек зависят от конкретных условий. Так, в важном частном случае, когда имеется близкий прототип измерительного комплекса рассматриваемого типа, для которого d^0 лежит достаточно близко к границе Ω, а интересующий вопрос состоит в определении малых допустимых отклонений точностных характеристик средств измерительного комплекса от точностных характеристик средств прототипа, часто можно ограничиться нахождением одной точки на границе Ω. Такая задача может иметь место при подборе элементов измерительных систем при серийном производстве или при комплектации измерительных систем компонентами, допускающими разброс точностных характеристик (по каждому типу комплектующих средств).

В качестве примера рассмотрим упрощенный измерительный комплекс, предназначенный для выставки вертикали околоземного космического аппарата (КА). Комплекс состоит из гироскопа, вектор кинетического момента которого моделирует местную вертикаль, и двух ньютонометров, установленных в плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента гироскопа. В предположении, что параметры движения КА точно известны, одна из компонент ухода вектора кинетического момента гироскопа описывается уравнениями

$$\dot{\beta} = \varepsilon, \ \dot{\varepsilon} = -\alpha\varepsilon + w;$$

показания соответствующего акселерометра записываются в виде

$$z = g\beta + v.$$

Здесь g — ускорение силы тяжести ($g = 1{,}27 \cdot 10^5$ км/ч^2);

$$M\{w(t)w(\tau)\} = q\delta(t-\tau); \ M\{v(t)v(\tau)\} = r\delta(t-\tau).$$

Численные значения параметров гироскопа и ньютонометров комплекса-прототипа: $\alpha = 1$, $q^0 = 10^{-7}$, $r^0 = 10^{-4}$.

Требуется определить область значений q и r, удовлетворяющих условию

$$\rho \leqslant \rho^0, \ \rho^0 = 10^{-10} \text{ рад}^2$$

(ρ — дисперсия ошибки оценивания β в установившемся стационарном режиме).

Ковариационная матрица ошибок оценивания вектора $x = (\beta, \varepsilon)^{\mathrm{T}}$ по измерениям z является решением матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} = AP + PA^{\mathrm{T}} + Q - Ph^{\mathrm{T}}r^{-1}hP, \tag{5}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, h = (g, 0)$. Стационарное решение (5) определяется как решение алгебраического матричного уравнения Риккати

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + Q - Ph^{\mathrm{T}}r^{-1}hP = 0. \tag{6}$$

Из (6) после ряда преобразований получаем для $\rho = P_{11}(\infty)$ алгебраическое уравнение

$$\rho^2[4r^2\alpha^2/g^4 + (4\alpha r/g^2)\rho + \rho^2] = 4qr^3/g^6,$$

решая которое, имеем

$$\rho = \frac{\alpha r}{g^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2g\sqrt{q/r}}{\alpha^2}} - 1\right).$$

Поиск методом Ньютона значений q и r, удовлетворяющих уравнению $\rho = \rho^0$ (с относительной точностью не хуже 1%), дает $r^* = 1{,}0875 \cdot 10^{-4}$, $q^* = 1{,}0875 \cdot 10^{-7}$, причем $\rho(r^*, q^*) = 1{,}0093 \cdot 10^{-10}$. Компоненты градиента функции ρ оказываются равными $\rho_r' = 6{,}6267 \cdot 10^{-10}$, $\rho_q' = 2{,}3831 \cdot 10^{-4}$, Аппроксимация $\widehat{\Omega}$ области Ω определяется неравенством

$$3{,}5962 \cdot 10^5 q + r \leqslant 1{,}4785 \cdot 10^{-4}. \tag{7}$$

Анализ области $\widehat{\Omega}$, определяемой (7), показывает, что точность выставки вертикали ρ более чувствительна к точностной характеристике ньютонометров r. Так, если взять $q = 1{,}2q^* = 1{,}3050 \cdot 10^{-7}$, то для выполнения ограничения (7) необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство $r \leqslant \leqslant 0{,}9269\, r^*$, т. е. увеличение ошибок выставки вертикали, которое происходит из-за ухудшения на 20% точностной характеристики гироскопа, может быть компенсировано улучшением точностных характеристик ньютонометров на 7,31%.

Предложенная в настоящей работе методика выработки требований к точностным характеристикам средств измерительных комплексов может быть использована при проектировании любых типов измерительных комплексов, предназначенных для наблюдения за вектором состояния динамических объектов. При этом необходимо лишь наличие математического описания таких комплексов на уровне (1), (2), достаточном для того, чтобы можно было записать уравнение вида (3) для ковариационной матрицы ошибок оценивания вектора состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства утверждения о вогнутости диагональных элементов ковариационной матрицы ошибок фильтрации $P(T)$, являющейся решением матричного дифференциального уравнения Риккати (3), перейдем от (3) к дискретному матричному уравнению Риккати:

$$\Gamma(t_{i+1}) = \Phi P(t_i)\Phi^{\text{т}} + BQ^*B^{\text{т}};$$
$$P(t_{i+1}) = \Gamma(t_{i+1}) - \Gamma(t_{i+1})H^{\text{т}}(H\Gamma(t_{i+1})H^{\text{т}} + R^*)^{-1}H\Gamma(t_{i+1}), \qquad (\text{П}.1)$$

где $t_{i+1} = t_i + \Delta$, $R^* = (1/\Delta)GRG^{\text{т}}$, $Q^* = Q\Delta$, $\Phi = I + A\Delta$, I — единичная матрица (для простоты в (П.1) у ряда матриц опущены аргументы). Как известно [4], после предельного перехода при $\Delta \to 0$ из (П.1) получается матричное дифференциальное уравнение Риккати (3).

Докажем утверждение о вогнутости диагональных элементов $P(t_{i+1})$, для чего воспользуемся методом математической индукции. Дадим малые приращения δD_0, δQ, δR матрицам D_0, Q и R. Для начального момента времени $t_0 = 0$ приращение второго порядка малости $\delta^2 P(t_0) \leqslant 0$ (точнее, $\delta^2 P(t_0) = \delta^2 P_0 = 0$, поскольку $P_0 = LD_0L^{\text{т}}$). Приращения второго порядка малости $\delta^2 R^*$ и $\delta^2 Q^*$ будут нулевые. Предположим, что $\delta^2 P(t_i) \leqslant 0$, тогда из первого равенства в (П.1) следует, что

$$\delta^2\Gamma(t_{i+1}) = \Phi\delta^2 P(t_i)\Phi^{\text{т}} + \delta^2 Q^* \leqslant 0.$$

Введем обозначение $M \equiv H\Gamma(t_{i+1})H^{\text{т}} + R^*$. Для приращения первого порядка малости $P(t_{i+1})$ из (П.1) получаем (опуская аргументы)

$$\delta P = \delta\Gamma - \delta\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H\Gamma - \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H\delta\Gamma +$$
$$+ \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H\delta\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H\Gamma + \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*M^{-1}H\Gamma. \qquad (\text{П}.2)$$

При получении (П.2) использовалось равенство вида $\delta(X^{-1}) = -X^{-1}\delta XX^{-1}$. Положив $K \equiv I - \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H$, запишем

$$\delta P = K\delta\Gamma K^{\text{т}} + \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*M^{-1}H\Gamma.$$

Для приращения второго порядка малости после ряда преобразований получаем

$$\delta^2 P = K\delta^2\Gamma K^{\text{т}} - 2K\delta\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}H\delta\Gamma K^{\text{т}} - 2\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*M^{-1}\delta R^*M^{-1}H\Gamma +$$
$$+ 2\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*M^{-1}H\delta\Gamma K^{\text{т}} + 2K\delta\Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*M^{-1}H\Gamma = K\delta^2\Gamma K^{\text{т}} -$$
$$- 2(K\delta\Gamma H^{\text{т}} - \Gamma H^{\text{т}}M^{-1}\delta R^*)M^{-1}(H\delta\Gamma K^{\text{т}} - \delta R^*M^{-1}H\Gamma) \leqslant 0.$$

По индукции для любого дискретного момента времени t_i $\delta^2 P(t_i) \leqslant 0$, а после предельного перехода при $\Delta \to 0$ для матрицы $P(T)$, являющейся решением (3), также имеем $\delta^2 P(T) \leqslant 0$, а следовательно, и для диагональных элементов матрицы $P(T)$ $\delta^2 P_{ii}(T) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, что и доказывает утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абдулаев Ш.-С. О., Волков В. А., Пицык В. В.** Определение требований к точностным характеристикам измерительных средств сложных измерительных систем.— Автометрия, 1976, № 5.
2. **Абдулаев Ш.-С. О., Волков В. А., Пицык В. В.** Обоснование требований к точностным характеристикам измерительных средств при интервальной обработке результатов измерений.— Автометрия, 1977, № 3.
3. **Сэйдж Э., Мелса Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
4. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
5. **Поддубный В. В., Якупов Р. Т.** Об одном подходе к автоматизации проектирования сложных информационно-измерительных систем для динамических объектов.— Автометрия, 1977, № 3.
6. **Якупов Р. Т.** Выбор оптимального состава измерительных средств для транспортных объектов на основе методов дискретного математического программирова-

ния.— В кн.: Оптимизация систем управления и фильтрации. Томск: изд. ТГУ, 1977, с. 166—177.
7. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 20 апреля 1979 г.;
окончательный вариант — 18 февраля 1980 г.

УДК 621.372.52 : 621.317.21

Ю. В. САФРОШКИН
(Москва)

О ВОЗМОЖНОСТИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ГЛУБИНЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Важнейшие свойства динамических устройств и систем с так называемой аддитивной (обычной) обратной связью (ОС): устойчивость или автоколебания, линейность и стабильность, чувствительность к внешним воздействиям и другие — обусловлены возвратной передачей (ВП), модуль которой является мерой усиления в замкнутом контуре ОС. С ВП просто связана (см. ниже) другая часто используемая функция относительной возвратной разности (ВР) по Г. Боде [1, 2]. Эти первичные и весьма важные в практическом отношении дифференциальные параметры контуров ОС обычно определяют расчетно. С этой целью, как правило, используются различные модели отдельных звеньев разомкнутого контура, что приводит к значительным погрешностям, особенно в нелинейных случаях. Измерения же практикуются реже, например, в частных случаях линейных и устойчивых контуров отрицательных ОС (усилители, регуляторы). Чаще измеряются менее информативные, но более доступные вторичные характеристики (передаточная функция вход — выход, ее частотные, фазовые или переходные характеристики, чувствительность к изменениям параметров) [3—6]. Измерения обычно проводят на контуре, поставленном в искусственный режим: разомкнутом или со введенными в разрыв вспомогательными компонентами для учета взаимного нагружающего влияния звеньев по обе стороны разрыва или с RC-фильтрами для частичного восстановления замкнутости контура по постоянной составляющей.

В то же время прямые способы измерения ВП и ВР — более общих и информативных характеристик динамических свойств контуров ОС — мало развиты ввиду ряда таких сложностей, как нелинейность (например, насыщение) и неустойчивость, дрейф и шумы, различие свойств разомкнутого и замкнутого контуров (с учетом предыдущих трудностей) и т. д.

В работе [7] обсуждается способ измерения контурной передачи (частный случай ВП в одноконтурной схеме), когда в разрыв контура вводится дополнительный малоинерционный усилитель с единичной передачей и двумя входами. При работе с дорогостоящими сервосистемами и регуляторами медленных технологических процессов стоимостью и влиянием усилителя можно пренебречь, однако они становятся существенными при работе с простыми и недорогими электронными устройствами.

В то же время до сих пор остается неиспользуемой значительно более простая возможность прямых, а следовательно, более надежных