$N_у$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	N	1	2	3	4	5
124	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	31	0	0	0	$1/\pi$	0
125	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	125	$1/\pi$	$1/2\pi$	$1/3\pi$	$-3/4\pi$	$1/5\pi$
126	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	63	0	$1/\pi$	0	$-1/2\pi$	0
127	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	127	$1/\pi$	$-1/2\pi$	$1/3\pi$	$-1/4\pi$	$1/5\pi$
128	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
129	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	129	$1/\pi$	$1/2\pi$	$1/3\pi$	$1/4\pi$	$1/5\pi$
130	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	65	0	1π	0	$1/2\pi$	0
131	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	131	$1/\pi$	$-1/2\pi$	$1/3\pi$	$-1/4\pi$	$1/5\pi$
132	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	33	0	0	0	$1/\pi$	0

Полученные соотношения могут применяться для оценки работы ПКЧ синтезирующего типа и в других областях, например при исследовании радиотехнических дискретных синтезаторов частот, в информационно-преобразовательной технике.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фурман Б. А.** Гармонический анализ фазовых неравномерностей дискретных преобразователей частоты.— Автометрия, 1976, № 2.
2. **Фурман Б. А.** Низкочастотные возмущения в цифровых регуляторах скорости электроприводов, определяемые неравномерностью работы дискретных задатчиков.— Электротехн. пром-сть. Сер. Электропривод, 1974, вып. 3 (29).

Поступила в редакцию 10 августа 1978 г.

УДК 519.24 : 621.317.77

Ю. Д. ПОПОВ

(Киев)

О ДЕКОДИРОВАНИИ ПО МИНИМУМУ РАССТОЯНИЯ В ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Можно предложить простые формулы для устранения неоднозначности циклических измерений в трехшкальных фазометрических системах, использующих принцип декодирования по минимуму расстояния [1]. Непосредственное перенесение полученных результатов на m-шкальные ($m > 3$) системы затруднено ввиду громоздкости аналитических формул, используемых для записи соответствующих решающих правил. Ниже приводятся простые алгоритмы, позволяющие выводить решающие правила, реализующие принцип декодирования по минимуму расстояния для произвольных m-шкальных фазометрических систем.

Рассмотрим систему уравнений

$$u = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = \ldots = (k_m + \varphi_m)/d_m.$$

Здесь $k_i = [d_i u]^+$, $\varphi_i = \{d_i u\}^+$ — соответственно целая и дробная части от $d_i u$, d_i — масштабные коэффициенты измерительных шкал, представляющие собой целые положительные числа. Проблема устранения неоднозначности циклических измерений состоит в оценке неизвестного параметра k_m по измеренным значениям $\widehat{\varphi}_i$ величин φ_i.

Пусть $\widehat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, где ψ_i — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону. Без ограничения общности можно считать, что $M\psi_i = 0$, $D\psi_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, m-1}$, $\psi_m \equiv 0$.

Принцип декодирования по минимуму расстояния для получения оценки $\widehat{k}_m$ параметров k_m основан на алфавитных схемах [1] и состоит в следующем. По статистике $\widehat{b}_m = \left(\widehat{b}_m^{(1)}, \ldots, \widehat{b}_m^{(m-1)}\right)$, $\left(\widehat{b}_m^{(i)} = \{\widehat{\varphi}_i - d_i \widehat{\varphi}_m / d_m\}^+\right)$ находится точка алфавита $\widehat{a}_m(k_m) = \left(\widehat{a}_m^{(1)}(k_m), \ldots, \widehat{a}_m^{(m-1)}(k_m)\right)$, $\widehat{a}_m^{(i)}(k_m) = \{d_i k_m / d_m\}^+$, ближайшая к точке $\widehat{b}_m$ в смысле евклидова расстояния, а затем по $\widehat{a}_m(k_m)$ определяется соответствующее ей значение параметра $\widehat{k}_m$. В [1] показано, что при сделанных выше предположениях относительно погрешностей ψ_i оценка $\widehat{k}_m$ является оценкой максимального правдоподобия.

Далее будет предложен эффективный метод поиска точки алфавита $\widehat{a}_m(k_m)$, наиболее близкой к точке $\widehat{b}_m$ для произвольного m, и на основании этого будут построены простые решающие правила оценки параметра k_m.

Для простоты изложения рассмотрим сначала случай $m = 3$, а затем перенесем полученные результаты на произвольное число шкал.

Так же, как и в [2], перейдем от алфавита $A_3 = \{a_3^{(1)}(k_3), a_3^{(2)}(k_3)\}$ к расширенному алфавиту $\bar{A}_3$. Введем в рассмотрение исходный минимальный треугольник и определим его следующим образом. Среди точек алфавита $\bar{A}_3$ находим точку A, ближайшую к точке $O(0, 0)$. Затем из точек алфавита $\bar{A}_3$, не лежащих на прямой OA, выбираем точку B такую, что $\rho(B, O) + \rho(B, A)$ минимально ($\rho(.,.)$ — обычное евклидово расстояние). Треугольник OAB и есть исходный минимальный. Остальные минимальные треугольники получаем так. Проводим семейства прямых, параллельных OA, OB, AB, на расстояниях, кратных $\rho(B, OA)$, $\rho(A, OB)$, $\rho(O, AB)$ соответственно. Зная координаты точек O, A, B, нетрудно записать их уравнения. Пусть они имеют вид

$$\alpha_l x + \beta_l y = i_l, \; l = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где α_l, β_l, i_l — целые числа. Заметим, что точки расширенного алфавита $\bar{A}_3$ совпадают с точками пересечения прямых указанных семейств. Минимальные треугольники — это треугольники наименьшей площади, образованные прямыми (1).

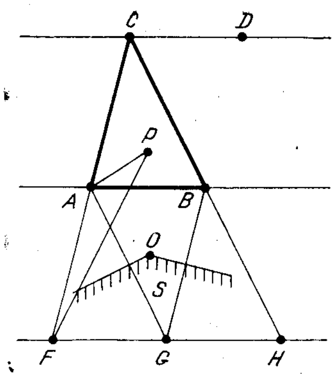
Чем интересны минимальные треугольники? Это выясняется следующими утверждениями.

Лемма 1. Минимальные треугольники сплошь покрывают квадрат θ_2 [2], в котором расположены точки $a_3(k_3)$ алфавита A_3 и точки $\widehat{b}_3$.

Плотная упаковка минимальных треугольников следует из приведенного выше способа их построения.

Лемма 2. Для любой внутренней точки P минимального треугольника $\min \rho(P, a_3(k_3))$ $(k_3 = \overline{0, d_3 - 1})$ достигается для точки алфавита $a_3(k_3)$, совпадающей с одной из его вершин.

Доказательство. Пусть треугольник ABC (см. рисунок) минимальный ($\rho(AB) \to \min$, $\rho(CA) + \rho(CB) \to \min$) и точка P — его внутренняя точка. Нетрудно показать, что из минимальности треугольника ABC следует, что он остроугольный. Это вытекает из возможного способа нахождения точки C: она лежит на одной из прямых, образующих алфавит, ближайшей к прямой AB, и, кроме того, C проецируется на отрезок AB. Этот способ эквивалентен тому, что $\rho(CA) + \rho(CB) \to \min$. Так как точка C



проецируется на AB, то углы A и B в треугольнике ABC острые. Так как $AB < AC$ и $AB < BC$, то и угол C также острый.

Докажем теперь, что если угол C острый, то ближайшими к точке P могут быть лишь точки A и B, но не точки алфавита, лежащие ниже прямой AB. Из последних рассмотрим лишь точки F и G. Очевидно, что $\rho(PF) > \rho(PA)$, так как угол PAF тупой ($\angle PAF = \angle PAB + \angle BAF = \angle PAB + 180° - \angle BAC$, а $\angle BAC$ острый). Для остальных точек алфавита, находящихся на прямой FH и отличных от G, рассуждения аналогичны. Покажем теперь, что и точка G не может быть ближе к P, чем любая из точек A или B. Для этого рассмотрим заштрихованную область S, образованную перпендикулярами, проведенными к серединам отрезков AG и BG. Поскольку треугольник ABG остроугольный, точка O (центр окружности, описанной около ABG) лежит внутри его, следовательно область S (совокупность точек, которые ближе к G, чем к A и B) не пересекается с треугольником ABG. А это значит, что ближайшими к точке P из ранее указанных могут быть лишь точки A и B. Повторяя рассуждения с использованием острых углов A и B, получим, что ближайшая к P точка совпадает с одной из вершин A, B или C, чем и завершается доказательство леммы 2.

Из свойств рассмотренных минимальных треугольников вытекает следующий простой алгоритм отыскания точки алфавита $\hat{a}_3(k_3)$, ближайшей к статистике $\hat{b}_3$. С помощью операции $\hat{i}_l = [\alpha_l \hat{b}_3^{(1)} + \beta_l \hat{b}_3^{(2)} + 0{,}5]^+$ определяем номера прямых (1), ближайших к точке $\hat{b}_3$, а значит, образующих минимальный треугольник, в который попадает $\hat{b}_3$. Решая системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_m x + \beta_m y = \hat{i}_m, \\ \alpha_n x + \beta_n y = \hat{i}_n, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad m \neq n, \end{cases}$$

находим вершины этого треугольника, а из них выбираем ту точку алфавита $\hat{a}_3(k_3)$, которая ближе других к $\hat{b}_3$. Остается лишь по координатам $\hat{a}_3(k_3)$ вычислить соответствующее им значение $\hat{k}_3$. Это можно сделать следующим образом. Из определения алфавита $\hat{a}_3^{(i)} = d_i k_3/d_3 - [d_i k_3/d_3]^+$ или

$$d_i k_3 \equiv d_3 \hat{a}_3^{(i)} \pmod{d_3}, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

причем $d_3 \hat{a}_3^{(i)}$ — целое число. Из определения алфавита также следует, что система сравнений (2) совместна и, если $(d_1, d_2, d_3)^+ = 1$, имеет единственное решение. В том случае когда какой-либо из масштабных коэффициентов d_1 или d_2 взаимно прост с d_3, то достаточно решить одно из сравнений (2), соответствующее d_i, взаимно-простому с d_3 (относительно решения системы сравнений (2) см. [3]).

Распространим теперь указанные процедуры на случай $m > 3$.

1. Построение исходного минимального гипертетраэдра. Среди точек расширенного алфавита $\bar{A}_m$ находим точку C_1, ближайшую к $O(0, 0)$. Из точек алфавита $\bar{A}_m$, не лежащих на прямой OC_1, выбираем точку C_2 такую, что $\rho(C_2, O) + \rho(C_2, C_1) \to \min$. Среди точек $\bar{A}_m$ вне плоскости OC_1C_2 отыскиваем точку C_3 такую, что $\rho(C_3, O) + \rho(C_3, C_1) + \rho(C_3, C_2) \to \min$. Продолжая аналогично, определяем точки $C_4, \ldots, C_{m-1}$. Полученные

таким образом точки O, C_1, ..., C_{m-1} и являются вершинами исходного минимального гипертетраэдра.

2. Построение минимальных гипертетраэдров. Через каждые $m-1$ из точек O, C_1, ..., C_{m-1} проводим гиперплоскости, а параллельно — семейства гиперплоскостей на расстояниях, кратных длинам соответствующих высот гипертетраэдра.

Пусть уравнения указанных семейств гиперплоскостей имеют вид

$$\alpha_{l1}x_1 + \ldots + \alpha_{l,m-1}x_{m-1} = i_l, \; l = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где α_{lk}, i_l — целые числа. Как и в трехмерном случае, они задают произвольные минимальные гипертетраэдры.

Леммы 1 и 2 очевидным образом обобщаются для $m > 3$, откуда вытекает

3. Решающее правило оценки параметра k_m с помощью декодирования по минимуму расстояния: по формуле $\widehat{i}_l = \left[\alpha_{l1}\widehat{b}_m^{(1)} + \ldots + \alpha_{l,m-1}\widehat{b}_m^{(m-1)} + 0{,}5\right]^+$ вычисляем номера гиперплоскостей семейств (3), ближайших к точке $\widehat{b}_m$ и образующих минимальный гипертетраэдр, в который попадает $\widehat{b}_m$. Решая системы уравнений

$$\alpha_{l1}x_1 + \ldots + \alpha_{l,m-1}x_{m-1} = \widehat{i}_l,$$

$$l = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m, \; j = \overline{1, m},$$

находим вершины этого гипертетраэдра и выбираем ту из них, которая ближе всего к точке $\widehat{b}_m$. Пусть координаты этой вершины суть $\widehat{a}_m^{(i)}$, $i = \overline{1, m-1}$. Тогда оценка $\widehat{k}_m$ параметра k_m определяется из системы сравнений

$$d_i k_m \equiv d_m \widehat{a}_m^{(i)} \pmod{d_m}, \; i = \overline{1, m-1}. \tag{4}$$

Система (4) совместна и имеет единственное решение, если $(d_1, \ldots, d_m)^+ = 1$. Заметим, что если для некоторых масштабных коэффициентов d_{i_j}, $j = \overline{1, r}$, $\left(d_{i_1}, \ldots, d_{i_r}, d_m\right)^+ = 1$, то вместо (4) можно рассмотреть систему

$$d_{i_j} k_m \equiv d_m a_m^{(i_j)} \pmod{d_m}, \; j = \overline{1, r}.$$

В частности, если d_m — простое число, то для нахождения $\widehat{k}_m$ достаточно решить любое из сравнений (4).

Замечание. Построение минимальных гипертетраэдров и в конечном счете нахождение уравнений семейств гиперплоскостей (3), задающих решающее правило оценки параметра k_m, при больших значениях m и d_m — весьма трудоемкий процесс, который может быть выполнен с использованием ЭВМ. В то же время для заданного набора масштабных коэффициентов d_1, ..., d_m эта процедура проводится лишь один раз, после чего для устранения неоднозначности (оценки параметра k_m по наблюденным значениям $\widehat{\varphi}_1$, ..., $\widehat{\varphi}_m$) надо пользоваться только правилом, описанным в п. 3.

Заметим также, что при построении оптимальных решающих схем, для которых вероятность $P\{\widehat{k}_m = k_m\}$ правильного устранения неоднозначности максимальна, следует при заданном значении d_m надлежащим образом выбрать остальные масштабные коэффициенты. Эту задачу можно решить простым перебором вариантов на ЭВМ. При этом нетрудно показать, что аналогично результатам [2] вероятность $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ максимальна, если радиус гиперсферы, описанный около минимального гипертетраэдра, минимален.

Пример. Пусть $m = 4$, $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 6$, $d_4 = 12$. Тогда вершины исходного минимального тетраэдра расположены в точках (0, 0, 0), (0, 1/3, 0), (1/2, 0, 0), (1/4, 0, 1/2), а семейства плоскостей, задающих остальные минимальные тетраэдры, определяются уравнениями $2x - z = i$, $3y = j$, $2x + 3y + z = k$, $2z = l$; $i, j, k, l = 0, \pm 1, \ldots$

Для $\hat{\varphi}_1 = 0{,}81$, $\hat{\varphi}_2 = 0{,}39$, $\hat{\varphi}_3 = 0{,}61$, $\hat{\varphi}_4 = 0{,}19$ имеем $\hat{b}_4^{(1)} = 0{,}7625$, $\hat{b}_4^{(2)} = 0{,}3267$, $\hat{b}_4^{(3)} = 0{,}515$, $\hat{i} = 1$, $\hat{j} = 1$, $\hat{k} = 3$, $\hat{l} = 1$. Решением систем уравнений

$$\begin{cases} 2x - z = 1, \\ 3y = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - z = 1, \\ 3y = 1, \\ 2z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - z = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 2z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 2z = 1 \end{cases}$$

является единственная точка (3/4, 1/3, 1/2) (вырожденный тетраэдр). Из системы сравнений $3k_4 \equiv 12 \cdot 3/4 (\mathrm{mod}\, 12)$, $4k_4 \equiv 12 \cdot 1/3 (\mathrm{mod}\, 12)$ получим $\hat{k}_4 = 7$. Заметим, что $\varphi_1 = 0{,}8$, $\varphi_2 = 0{,}4$, $\varphi_3 = 0{,}6$, $\varphi_4 = 0{,}2$ соответствуют значению $k_4 = 7$.

Приведенный пример лишь иллюстрирует принцип метода декодирования по минимуму расстояния, и в нем не рассматриваются вопросы оптимального выбора масштабных коэффициентов и расчета вероятности правильного устранения неоднозначности. Подобные вопросы обсуждаются в [2].

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Согласно предложенному здесь методу устранения неоднозначности, необходимо решать m систем линейных алгебраических уравнений с $m - 1$ неизвестными. Если это в силу каких-либо обстоятельств неприемлемо, то описанный алгоритм целесообразно сочетать с известным методом последовательного пересчета (см., например, [1]). В этом случае для малых шкал используется предложенный метод, а для последующих — метод последовательного пересчета. Заметим, что для реальных систем вероятность правильного устранения неоднозначности при этом выше, чем при непосредственном применении метода последовательного пересчета, так как малые шкалы не формируются [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— Автометрия, 1972, № 4.
2. **Попов Ю. Д.** Об одной задаче оптимального выбора решающего правила для алфавитной схемы устранения неоднозначности циклических измерений.— Автометрия, 1978, № 3.
3. **Бухштаб А. А.** Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.
4. **Попов Ю. Д.** О сравнении некоторых методов устранения неоднозначности циклических измерений.— Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 10.

Поступила в редакцию 28 мая 1979 г