

Для средней по всем компонентам дисперсии ошибки восстановления из формулы (22) будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D\delta_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} A_{ij}^{(hk)} / n \sum_{i,j} A_{ij}.$$

Полученные результаты позволяют по гистограмме распределения, зарегистрированного шумящей аппаратурой, построить гистограмму, соответствующую распределению, не искаженному шумами аппаратуры. Однако при этом точность восстановленной гистограммы ниже точности зарегистрированной. Степень возрастания ошибки определяется матрицей  $K$  и может быть вычислена по соответствующим формулам. Это обстоятельство дает возможность по заданной точности восстановленной гистограммы получить необходимое число испытаний при регистрации распределений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каверкин И. Я., Цветков Э. И. Анализ и синтез измерительных систем. Л.: Энергия, 1974.
2. Малевич И. А., Чернявский А. Ф. Двухшкальный преобразователь время — код на двух стабилизированных по частоте рециркуляционных генераторах. — Автоматика, 1974, № 3.
3. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. — УФН, 1970, т. 102, вып. 3.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятности. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию 7 августа 1977 г.;  
окончательный вариант — 10 сентября 1980 г.

К. В. ИСАЕВ

(Ростов-на-Дону)

УДК 62-501.72

### ОБ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

При идентификации динамических объектов большое распространение получили линейные регрессионные модели [1, 2] вида

$$\tilde{y}(t) = B^T[x(t)]c^* + e(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  — вход объекта;  $B[\cdot]$  —  $n$ -вектор базисных преобразователей (физически реализуемых операторов);  $c^*$  —  $n$ -вектор неизвестных параметров, подлежащих оцениванию;  $\tilde{y}(t)$  — наблюдаемый выход объекта;  $e(t)$  — независимый от остальных процессов белый шум с нулевым средним значением и автокорреляционной функцией  $\sigma^2\delta(t-\tau)$  ( $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака);  $\tau$  — символ транспонирования. Оценка  $c(t)$  параметра  $c^*$ , полученная методом наименьших квадратов по результатам наблюдения  $\tilde{y}(t)$  на интервале  $[t_0, t]$ , является состоятельной и эффективной в классе возможных линейных по  $\tilde{y}(t)$  оценок и выражается формулами:

$$c(t) = D(t) \int_{t_0}^t z(\tau) \tilde{y}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$D^{-1}(t) = \int_{t_0}^t z(\tau) z^T(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $z(t) = B[x(t)]$ . Дисперсионная матрица текущей оценки  $c(t)$  с точностью до коэффициента, равного  $\sigma^2$ , совпадает с матрицей  $D(t)$ . Учитывая, что  $\int_t^{t+\Delta t} z(\tau) \tilde{y}(\tau) d\tau = D^{-1}(t) c(t) + \int_t^{t+\Delta t} z(\tau) \tilde{y}(\tau) d\tau$ , и вводя для двух произвольных  $n$ -мерных процессов  $\gamma(\tau)$  и  $\xi(\tau)$  матрицу

$$M(\gamma, \xi) = \int_t^{t+\Delta t} \gamma(\tau) \xi^T(\tau) d\tau, \quad (4)$$

можно записать

$$c(t + \Delta t) = D(t + \Delta t) \left[ D^{-1}(t) c(t) + \int_t^{t+\Delta t} z(\tau) \tilde{y}(\tau) d\tau \right], \quad (5)$$

$$D(t + \Delta t) = [D(t) + M(z, z)]^{-1}. \quad (6)$$

Рекуррентные соотношения (5), (6) связывают оценку  $c(t + \Delta t)$  и дисперсионную матрицу  $D(t + \Delta t)$ , соответствующие моменту наблюдения  $t + \Delta t$ , с ранее полученными оценкой  $c(t)$  и дисперсионной матрицей  $D(t)$ , а также с результатами наблюдения объекта на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$ . Непрерывный аналог соотношений (5), (6) в виде дифференциальных уравнений получается непосредственно путем дифференцирования соотношений (2), (3) по  $t$  и несложных преобразований:

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = K(t) \varepsilon(t), \\ \dot{D}(t) = -K(t) K^T(t), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} K(t) &= D(t) z(t), \\ \varepsilon(t) &= \tilde{y}(t) - y(t), \\ y(t) &= B^*[x(t)] c(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Алгоритм (7), (8) может быть реализован, например, в виде аналоговой самонастраивающейся модели с помощью матричных умножителей, сумматоров и интеграторов. При этом так же, как и при использовании алгоритма (5), (6), в момент  $t_0$  начала наблюдения необходимо задавать априорные оценки  $c(t_0)$ ,  $D(t_0)$ .

Ниже будем полагать, что базисные преобразователи в (1) реализуют операторы типа Гаммерштейна:

$$B^*[x(t)] = L^T F(x(t)), \quad (9)$$

где  $L$  —  $n$ -вектор линейных операторов (линейная часть базисных преобразователей — ЛЧБП);  $F(\cdot) = \text{diag}(f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot))$  — диагональная матрица ограниченных функций, объединяющая нелинейные безынерционные части базисных преобразователей (НЧБП). Не нарушая общности, можно принять, что  $f_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Эффективность идентификации, определяемая окончательным значением дисперсионной матрицы  $D(t)$  и временем наблюдения объекта, в значительной степени зависит от входного (тестирующего) сигнала  $x(t)$ . В отличие от пассивной идентификации, когда, например, технологический объект наблюдается в режиме нормальной эксплуатации, при активной идентификации имеется некоторым образом изменять вход  $x(t)$  и добиваться повышения эффективности экспериментов.

Различные постановки задачи оптимизации ограниченного по амплитуде тестирующего сигнала связаны, как правило, либо с фиксированным временем наблюдения, в течение которого следует добиться максимальной

точности оценок параметров, либо с некоторой заданной точностью оценок, которую необходимо достичь в кратчайшее время и с минимальными затратами [3]. Подробный обзор методов решения задач этих типов можно найти в работе [4]. В настоящее время эти методы нельзя считать достаточно хорошо (для практических целей) разработанными. Обычно их авторы стремятся свести задачу оптимальной идентификации к одной из хорошо разработанных задач теории планирования экспериментов. При этом делается ряд упрощающих допущений, существенно снижающих ценность полученных результатов.

Рассматриваемая ниже постановка задачи активной идентификации идейно близка к схеме локального, или непрерывного, планирования  $D$ -оптимальных экспериментов, предложенной в работе [5], и связана с текущим улучшением тестирующего сигнала, приводящим к максимальному локальному приращению информации о параметрах объекта. Помимо существенного упрощения с вычислительной точки зрения, такая постановка оказывается лучше приспособленной в случаях непредсказуемо меняющихся условий и целей идентификации, когда, например, необходимо проследить за изменением параметров объекта в течение неограниченного времени в зависимости от некоторого фактора, характеризующего меняющиеся внешние условия.

Для текущего момента времени  $t$  и фиксированного приращения  $\Delta t$  будем выбирать значение  $x_i$  входа  $x(t)$  постоянным на интервале  $[t, t + \Delta t)$  и ограниченным неравенством

$$|x_i| \leq 1 \quad (10)$$

из условия достижения определителем информационной матрицы  $|D^{-1}(t + \Delta t)|$  (или, что то же самое, его логарифмом  $\ln|D^{-1}(t + \Delta t)|$ ) максимального значения. (К ограничению (10) путем изменения НЧБП сводятся ограничения более общего вида:  $a \leq |x(t)| \leq b$ .) В рассмотренной постановке задачи алгоритм, описываемый соотношениями (5), (6) либо уравнениями (7), может реализовываться параллельно с процессом текущего планирования тестирующего сигнала и, следовательно, пригоден для активной идентификации нелинейных по неизвестным параметрам динамических объектов. Так же, как и в случае статических объектов [6], при этом можно использовать процедуру, в которой фигурирует последовательность линейных (по приращениям  $\Delta c$  оцениваемых параметров) моделей. Каждая из этих моделей представляет собой разложение оператора объекта по приращениям  $\Delta c$  в окрестности текущей оценки вектора параметров  $c(t)$ . Так как базисные операторы становятся при этом зависимыми от текущей оценки параметра  $c^*$ , то планирование тестирующего сигнала необходимо чередовать с идентификацией.

Введем обозначение  $z_i(\tau)$  для вектора выходов базисных преобразователей в случае, если бы при всех  $\tau \geq t$  (а не только при  $t \leq \tau < t + \Delta t$ ) на их входах сохранялось бы значение  $x(\tau) = x_i$ . Очевидно, что  $z_i(\tau)$  совпадает с  $z(\tau)$  при  $\tau < t + \Delta t$  и справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$z_i(\tau) = z_{i-\Delta t}(\tau) - F(x_{i-\Delta t})h_i(\tau) + F(x_i)h_i(\tau) = z_i^0(\tau) + F(x_i)h_i(\tau), \quad (11)$$

где  $h_i(\tau) = h(\tau, t)$  — вектор ступенчатых переходных характеристик ЛЧБП;  $z_i^0(\tau) = z_{i-\Delta t}(\tau) - F(x_{i-\Delta t})h_i(\tau)$  — вектор свободных (собственных) процессов на выходах базисных преобразователей, соответствующий нулевому входу на интервале  $[t, t + \Delta t)$ . Используя (6), (9), (11), а также обозначение (4), легко получить

$$D^{-1}(t + \Delta t) = D^{-1}(t) + M(z_i^0, z_i^0) + \Delta M(x_i), \quad (12)$$

где

$$\Delta M(x_i) = F(x_i)M(h_i, z_i^0) + M(z_i^0, h_i)F(x_i) + F(x_i)M(h_i, h_i)F(x_i). \quad (13)$$

Используя (12), разложим  $\ln|D^{-1}(t + \Delta t)|$  в ряд Тейлора с точностью до линейного члена:

$$\ln|D^{-1}(t + \Delta t)| \approx \ln|D^{-1}(t) + M(z_i^0, z_i^0)| + \text{Sp}[D(t)\Delta M(x_i)] \quad (14)$$

( $\text{Sp} A$  означает след матрицы  $A$ ).

Учитывая, что матрица  $\Delta M$  имеет порядок малости  $\Delta t$ , задачу выбора оптимального значения  $x_i^*$  запишем в виде

$$\text{Sp}[D(t)\Delta M(x_i)] \rightarrow \max_{x_i, |x_i| \leq 1} \quad (15)$$

Как видно из (13)  $\text{Sp}[D(t)\Delta M(x_i)]$  представляет собой квадратичную функцию от  $f_1(x_i), f_2(x_i), \dots$ . Если, например, функции  $f_1(x_i), f_2(x_i), \dots$ , входящие в НЧБП, — полиномы, максимальная степень которых  $r$ , то задача (15) сводится к максимизации полинома степени  $2r$  на интервале  $[-1, +1]$ . При не слишком высоких степенях  $r$  решение этой задачи не требует мощных вычислительных средств. В частности, для линейных систем  $r = 1$ ,  $f_i(x_i) = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\text{Sp}[D(t)\Delta M(x_i)] = x_i \text{Sp}[D(t) \times (M(h_i, z_i^0) + M(z_i^0, h_i))] + x_i^2 \text{Sp}[D(t)M(h_i, h_i)]$ . В силу положительной определенности матриц  $D(t)$  и  $M(h_i, h_i)$  коэффициент при  $x_i^2$  в последнем выражении всегда положителен, и, следовательно, оптимальное значение  $x_i^*$  определяется знаком коэффициента при  $x_i$ :

$$x_i^* = \text{sign}\{\text{Sp}[D(t)(M(h_i, z_i^0) + M(z_i^0, h_i))]\}. \quad (16)$$

Далее задачу можно упростить, если перейти к ее непрерывному аналогу. Для этого прологарифмируем (3), а затем продифференцируем полученное выражение по  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \ln|D^{-1}(t)| = \text{Sp}[D(t)z(t)z^T(t)]. \quad (17)$$

Конечно, в каждый текущий момент времени значение  $x_i = x(t)$  желательно выбрать таким, чтобы максимизировать (17). Однако для реальных фильтров  $h_i(t) = 0$ , и, следовательно, в силу (11) правая часть (17) не зависит от  $x_i$ . Поэтому естественно максимизировать вторую производную от  $\ln|D^{-1}(t)|$ . Дифференцируя (17) с учетом (11) и оставляя в полученном выражении лишь члены, зависящие от  $x(t)$ , приходим к задаче

$$\text{Sp}\{D(t)[F(x(t))g_t(t)z^T(t) + z(t)g_t^T(t)F(x(t))]\} \rightarrow \max_{x(t)} \quad (18)$$

где  $g_i(\tau)$  — импульсные переходные характеристики ЛЧБП. Задача (18) состоит в максимизации линейной формы от функций  $f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots$  и, следовательно, требует меньше вычислительных затрат, чем задача (15). В частности, для линейных систем решение этой задачи имеет вид

$$x^*(t) = \text{sign}\{\text{Sp}[D(t)(g_i(t)z^T(t) + z(t)g_i(t))]\}.$$

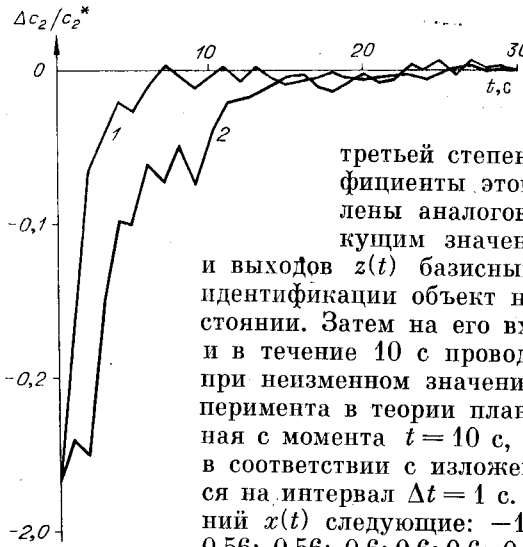
В качестве примера рассмотрим модель, состоящую из трех базисных преобразователей, нелинейные части которых имеют соответственно вид  $f_1(x) = 0,5x + x^2$ ,  $f_2(x) = x - 0,3x^3$ ,  $f_3(x) = x^2$ , а линейные части — фильтры Лагерра со ступенчатыми переходными характеристиками

$$h_i^i(\tau) = g_0^i - Q_i(\tau - t) \exp[-\alpha(\tau - t)] \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $Q_i(\cdot)$  — полиномы степени  $i - 1$  с коэффициентами

$$g_j^i = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{i-j-1} \frac{(i-j)!(-2)^{j+k}\alpha^j}{j!(i-k-j-1)!(i+k)!} \quad (j = 0, 1, 2, i - 1)$$

при  $j$ -й степени аргумента. Для рассматриваемого примера условие (18)



приводит к необходимости в каждый текущий момент времени определять значение  $x_1$ , максимизирующее полином третьей степени на интервале  $[-1, +1]$ . Коэффициенты этого полинома могут быть вычислены аналоговым или цифровым способом по текущим значениям дисперсионной матрицы  $D(t)$  и выходов  $z(t)$  базисных преобразователей. До начала идентификации объект находился в невозбужденном состоянии. Затем на его вход был подан сигнал  $x(t) \equiv 1$ , и в течение 10 с проводилась пассивная идентификация при неизменном значении  $x(t)$  (аналог затравочного эксперимента в теории планирования экспериментов). Начиная с момента  $t = 10$  с, тестирующий сигнал выбирался в соответствии с изложенной методикой и распространялся на интервал  $\Delta t = 1$  с. Для  $\alpha = 0,1$  с<sup>-1</sup> первые 30 значений  $x(t)$  следующие:  $-1; -1; 0,4; 0,44; 0,48; 0,52; 0,52; 0,56; 0,56; 0,6; 0,6; 0,6; 0,56; 0,52; 0,44; -0,84; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -1; 0,36; 0,68; 0,72$ . На рисунке показана соответствующая этому входному сигналу 1-я реализация процесса оценивания параметра  $c_2$  по алгоритму (5), (6) в виде относительного отклонения  $\Delta c_2/c_2^*$  от истинного значения  $c_2^*$  (второй этап тестирования). Для сравнения там же показана 2-я реализация этого же процесса при тестировании периодической (псевдослучайной) двоичной последовательностью (ПДШ), часто применяемой для целей идентификации:  $1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1$ . Как видно из рисунка, на больших временах оба способа отличаются не столь значительно, как в начале тестирования. Более того, применение глобально оптимального (для всего рассматриваемого промежутка времени) входного сигнала привело бы к заведомо лучшим конечным результатам. Тестирование же рассмотренным в настоящей работе способом более приспособлено к получению в данный текущий момент времени приемлемых результатов и направлено на быстрейшее восполнение имеющихся в них пробелов. При этом, как показывает рисунок, достаточно хорошие результаты оказываются в руках экспериментатора значительно раньше, чем при других способах тестирования.

В приведенном примере основным пробелом первого этапа тестирования оказалась низкая точность оценки параметра  $c_2$ . Поэтому именно для  $c_2$  эффективность второго этапа тестирования рассмотренным методом оказалась значительно выше по сравнению со случаем применения ПДШ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
2. Эйхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
3. Круг Г. К., Сосулин Ю. А., Фатуев В. А. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. М.: Наука, 1977.
4. Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М. Планирование промышленных экспериментов. М.: Металлургия, 1978.
5. Соколов С. Н. Непрерывное планирование регрессионных экспериментов.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, вып. 2.
6. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 18 января 1979 г.;  
окончательный вариант — 27 ноября 1979 г.