УДК 621.391.19

А. Н. ЛАЗАРЧИК, И. А. МАЛЕВИЧ
(Минск)

АНАЛИЗ АППАРАТУРНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ГИСТОГРАММ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СИГНАЛОВ

При регистрации плотности распределения случайной величины (обычно одномерной) при помощи многоканальных информационно-измерительных систем (ИИС) возникает задача описания влияния различного рода внутренних шумов аппаратуры (шумы промежуточных преобразователей, флуктуации измерительной шкалы и пр.) на регистрируемую гистограмму распределения [1, 2].

Цель работы — решение задачи восстановления гистограмм распределения на основе известных статистических свойств флуктуаций ИИС. Рассматривается случай неполной априорной информации о регистрируемом распределении.

Анализ модели взаимодействия регистрируемых распределений с аппаратурными флуктуациями ИИС. Рассмотрим регистрацию плотности распределения вероятности случайной величины на фиксированном интервале от $-T/2$ до $T/2$. Данный интервал отображается в многоканальной ИИС в виде ряда из n каналов, ширина одного канала $\Delta = T/n$. Считаем, что в процессе выполнения промежуточных преобразований измеряемая величина подвергается воздействию случайной аддитивной некоррелированной помехи ξ с плотностью вероятности $w(\xi)$. Флуктуации границ каналов в многоканальной ИИС η предполагаем независимыми с нулевым средним и ограниченными, т. е. $\max|\eta| < \Delta/2$. Плотность распределения η обозначим $p(\eta)$.

Пусть $W(y)$ — плотность распределения измеряемой величины после выполнения над ней ряда промежуточных преобразований в ИИС. В силу аддитивности помехи плотность $W(y)$ связана с плотностью распределения $\varphi(x)$ входной величины x следующим соотношением:

$$W(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(y-x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Вероятность попадания величины y в i-й канал системы с учетом независимости величины флуктуации правой и левой границы i-го канала равна

$$q_i = \int\limits_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\,W(y+\tau)\,d\tau dy.$$

Рассмотренный вид флуктуаций границ канала эквивалентен действию на величину y аддитивной помехи ξ_1 с плотностью распределения $p(\xi_1)$. Это позволяет считать, что на «нешумящей» шкале ИИС регистрируется плотность распределения

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(s-y)\,W(s)\,ds.$$

Учитывая (1), получим связь этой плотности распределения с плотностью распределения входной величины $\varphi(x)$:

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau-y)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$K(\tau - y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(s-y)\, w(s-\tau)\, ds.$$

Функция $K(\tau - y)$ зависит только от свойств шумов промежуточных преобразователей ИИС. Она определяет характер искажения регистрируемой плотности распределения.

Как видно из (2), $f(y)$ представляет собой результат действия на исходную функцию $\varphi(x)$ интегрального оператора с ядром $K(\tau - y)$. Таким образом, определение функции $\varphi(x)$ по результатам измерения функции $f(y)$ является задачей решения интегрального уравнения Фредгольма I рода [3].

Задача восстановления функции плотности распределения в конечных точках, т. е. построения гистограммы функции $\varphi(x)$, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим указанную систему уравнений. Для этого запишем, используя (2), вероятность попадания величины y в i-й канал ИИС:

$$q_i = \int\limits_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} f(y)\, dy = \int\limits_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int\limits_{-T/2}^{T/2} K(\tau - y)\, \varphi(\tau)\, d\tau dy. \tag{3}$$

Далее, воспользовавшись теоремой о среднем, запишем (3) в виде

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j K_{ji}, \tag{4}$$

где f_i — значение функции $f(y)$ в некоторой точке на интервале $((i-1)\Delta, i\Delta)$; φ_j — значение функции $\varphi(x)$ в некоторой точке на интервале $((j-1)\Delta, j\Delta)$; K_{ji} — матрица, определяемая выражением

$$K_{ji} = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} \int\limits_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} K(\tau - y)\, d\tau dy.$$

В случае когда вектор f и матрица K в (4) известны точно, вектор φ, который является решением системы уравнений (4), есть восстановленная гистограмма распределения $\varphi(x)$. Однако на практике и вектор f, и матрица K известны с некоторой конечной точностью. В этих условиях возникает задача определения не только восстановленного вектора φ, но и точности его восстановления при известной точности исходных данных.

Рассмотрим систему уравнений, аналогичную (4), в которой к вектору f добавлен случайный вектор ошибок ζ, к матрице K — случайная матрица погрешностей $\varkappa$, а к вектору φ — вектор ошибок δ:

$$f_i + \zeta_i = \sum_{j=1}^{n} (K_{ji} + \varkappa_{ji})(\varphi_j + \delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

В этой системе уравнений величины f, K и φ соответствуют точной системе уравнений (4), а величины ζ, $\varkappa$ и δ являются случайными. Равенство (5) определяет связь между ними. Принимая во внимание (4), из (5) получим $\zeta = \varphi\varkappa + \delta K + \delta\varkappa$.

Будем считать, что $\varkappa$ и δ малы по отношению к соответствующим компонентам матрицы K и вектора φ. Тогда для вектора δ справедливо равенство

$$\delta = \zeta K^{-1} - \varphi\varkappa K^{-1}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что дисперсия вектора ошибок восстановления равна сумме дисперсий двух составляющих:

$$D\delta_i = D\delta_i' + D\delta_i'',$$

где $D\delta_i'$ и $D\delta_i''$ — соответственно дисперсии первого и второго слагаемых в уравнении (6).

Рассмотрим влияние вектора ζ, полагая, что матрица K определена точно, т. е. $\varkappa = 0$. Это условие преобразует выражение (6) к виду $\delta = \delta' = \zeta K^{-1}$.

Компоненты случайного вектора ζ определяют отклонения относительной частоты попадания случайной величины в i-й канал ИИС $h_i = m_i/N$ (m_i — число величин, попавших в i-й канал; N — общее число испытаний) от соответствующей вероятности $f_i\Delta$ или для плотности распределения — отклонение величины $H_i = h_i/\Delta$ от величины f_i, что позволяет записать

$$H_i = f_i + \zeta_i. \tag{7}$$

Компоненты вектора H измеряются непосредственно ИИС. Для решения задачи восстановления необходимо знать распределение вектора ζ. Плотность распределения вектора ζ зависит от типа ИИС.

Восстановление гистограммы распределения для одноканальной ИИС. Одноканальной ИИС считаем систему, имеющую один классовый интервал, который принимает последовательно n фиксированных положений во всем диапазоне измерения от $-T/2$ до $T/2$. Для i-го положения канала проводится N испытаний, по которым определяется H_i. Для получения гистограммы распределения выполняется nN испытаний.

Величины отклонения относительной частоты событий h_i от соответствующих вероятностей $q_i = f_i\Delta$ для данного типа ИИС будут статистически независимы. Величина h_i имеет асимптотически нормальное распределение с центром q_i и дисперсией $\sigma_i^2 = \frac{1}{N} q_i (1 - q_i)$, поэтому при достаточно больших N для векторов ζ находим

$$p(\zeta) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi s_i^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2s_i^2} \zeta_i^2\right\}, \tag{8}$$

где $s_i^2 = \sigma_i^2/\Delta^2$.

Будем предполагать, что $q \neq 0$ для всех i. Запишем, учитывая формулы (4), (7), (8), условную плотность распределения вектора H при заданном векторе φ:

$$P(H/\varphi) = \prod_{i=1}^{n} \left(2\pi s_i^2\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2s_i^2}\left[H_i - \sum_{j=1}^{n} K_{ji}\varphi_j\right]^2\right\}. \tag{9}$$

В случае отсутствия априорных сведений о векторе φ априорную плотность $P(\varphi)$ считаем независимой от φ, т. е. $P(\varphi) = \text{const}$ в соответствующей области n-мерного пространства. В этом случае оценки вектора φ при известном H по максимумам апостериорной вероятности, правдоподобия и минимуму среднеквадратичной ошибки совпадают. Найдем оценку по максимуму апостериорной вероятности, которая согласно (9) равна

$$P(\varphi \mid H) = C \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}\left[\sum_{j=1}^{n} K_{ji}(\varphi_{0j} - \varphi_j)\right]^2\right\}.$$

Здесь C — константа, не зависящая от φ, вектор H представляется в виде

$$H = \varphi_0 K. \tag{10}$$

Введем матрицу L, связанную с матрицей K соотношением

$$L_{ji} = (1/s_i) K_{ji}.$$

Тогда получим (в матричной записи)

$$P(\varphi \mid H) = C \exp\{-(1/2)(\varphi_0 - \varphi)L^2(\varphi_0 - \varphi)^{\mathrm{T}}\}, \tag{12}$$

3*

где $L^2 = LL^т$, т — символ транспонирования.

Из выражения (12) видно, что $P(\varphi|H)$ является n-мерным нормальным распределением с центром φ_0 и корреляционной матрицей $(L^2)^{-1}$. Следовательно, максимум апостериорной вероятности достигается в точке φ_0. Вектор φ_0 соответствует восстановленной гистограмме распределения и является решением системы уравнений (10). При этом дисперсия ошибки восстановления в i-й точке $D\delta_i = (L^2)^{-1}_{ii} = \left(L^{-1}\right)^2_{ii}$. Точность восстановления гистограмм в целом характеризуется средней дисперсией $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D\delta_i = \frac{1}{n}\,\mathrm{Sp}\left(L^{-1}\right)^2$. Символ Sp означает след матрицы.

Восстановление гистограмм распределения для многоканальных ИИС. Считаем, что все поступившие на вход системы события регистрируются, т. е. при каждом испытании измеряемая величина попадает в один из n каналов (случай ИИС с памятью без учета «мертвого» времени).

Распределение числа попаданий по каналам ИИС в этом случае описывается полиномиальным законом

$$W_N(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{N!}{m_1!m_2!\ldots!m_n!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}. \qquad (13)$$

Здесь p_i — вероятность попадания, а m_i — число попаданий случайной величины в i-й канал ($p_i = f_i\Delta$). Величины m_i подчиняются условию

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = N. \qquad (14)$$

На практике в многоканальных ИИС общее число испытаний N достаточно велико, что позволяет использовать для анализа непрерывное многомерное распределение, к которому сходится распределение W_N при $N \to \infty$. Известно [4], что

$$W_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\sqrt{2\pi N}}{(2\pi)^n \sqrt{N^n p_1 p_2 \ldots p_n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i}\right\}. \qquad (15)$$

Следовательно, для больших N распределение (13) можно считать многомерным нормальным распределением в гиперплоскости (14). Учитывая то обстоятельство, что компоненты вектора ошибок $\zeta_i = (1/\Delta)((m_i/N) - p_i)$, и воспользовавшись соотношением (15), распределение для вектора ζ будет следующим:

$$P(\zeta) = C_1 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i^2 N\Delta^2}{p_i}\right\}$$

(C_1 — коэффициент, не зависящий от ζ).

Уравнение гиперплоскости (14) в новых переменных запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i = 0. \qquad (16)$$

Предполагая, как и в предыдущем случае, что априорное распределение $P(\varphi) = \mathrm{const}$ в соответствующей области n-мерного пространства, найдем условную плотность распределения

$$P(\varphi\,|\,H) = C_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^2}\left[H_i - \sum_{j=1}^{n} K_{ji}\varphi_j\right]^2\right\},$$

где $s_i^2 = p_i/N\Delta^2$, C_2 — некоторая константа, не зависящая от φ.

Введем вектор φ_0, который удовлетворяет уравнению (10), и матрицу L согласно равенству (11). Проведя преобразования, аналогичные преобразованиям (12), получим

$$P(\varphi|H) = C_2 \exp\{-(1/2)(\varphi_0 - \varphi)L^2(\varphi_0 - \varphi)^T\}. \qquad (17)$$

Оценкой по максимуму апостериорной вероятности для φ является вектор φ_0, который совпадает с соответствующим вектором в случае одноканальной ИИС, однако дисперсия этой оценки будет иной, так как на переменные ζ_i наложено условие (16).

Введем обозначение $\delta = \varphi_0 - \varphi$ для вектора ошибки восстановления гистограммы, тогда (17) примет вид

$$P(\delta|H) = C_2 \exp\{-(1/2)\delta L^2 \delta^T\}. \qquad (18)$$

При этом из (16) следует уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0. \qquad (19)$$

Полученное распределение (18) является несобственным n-мерным нормальным распределением. Для определения дисперсии величин δ_i выразим из (19) l-ю компоненту вектора δ и подставим в (18):

$$P(\delta_1, \ldots, \delta_{l-1}, \delta_{l+1}, \ldots, \delta_n | H) = C_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} M_{ji}\delta_i\delta_j\right\}. \qquad (20)$$

Матрица M получается из матрицы L^2 вычеркиванием l-й строки и l-го столбца и прибавлением к оставшимся элементам элементов вычеркнутой строки и столбца по следующему правилу:

$$M_{ji} = L_{ji}^2 + L_{ll}^2 - L_{jl}^2 - L_{li}^2 \quad (i, j \neq l).$$

Распределение (20) является уже собственным $n-1$-мерным нормальным распределением с матрицей моментов M^{-1}. Дисперсия i-й компоненты вектора оценки φ_0

$$D\delta_i = M_{ii}^{-1}. \qquad (21)$$

Дисперсия l-й (исключенной) компоненты не входит в матрицу M^{-1}, но ее можно определить через элементы этой матрицы:

$$D\delta_l = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} M_{ji}^{-1}.$$

Это равенство является следствием соотношения (19). Дисперсии оценок компонент вектора φ_0 можно определить и без построения матрицы M и последующего ее обращения. Для этого достаточно заметить, что любой элемент матрицы M^{-1} выражается через миноры матрицы L^2 следующим образом:

$$M_{kl}^{-1} = (-1)^{k+l} \sum_{i,j} A_{ij}^{(kl)} \Big/ \sum_{i,j} A_{ij}, \qquad (22)$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы L^2; $A_{ij}^{(kl)}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы, получающейся из матрицы L^2 вычеркиванием k-й строки и l-го столбца. Суммы берутся по всевозможным сочетаниям индексов i, j.

В общем случае вычисление дисперсий по формуле (22) требует значительно большего объема вычислений, чем по формуле (21), но в некоторых случаях, например в случае диагонального вида матрицы L^2, выгоднее использовать равенство (22).

Для средней по всем компонентам дисперсии ошибки восстановления из формулы (22) будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D\delta_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j} A_{ij}^{(kk)}/n \sum_{i,j} A_{ij}.$$

Полученные результаты позволяют по гистограмме распределения, зарегистрированного шумящей аппаратурой, построить гистограмму, соответствующую распределению, не искаженному шумами аппаратуры. Однако при этом точность восстановленной гистограммы ниже точности зарегистрированной. Степень возрастания ошибки определяется матрицей K и может быть вычислена по соответствующим формулам. Это обстоятельство дает возможность по заданной точности восстановленной гистограммы получить необходимое число испытаний при регистрации распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каверкин И. Я., Цветков Э. И.** Анализ и синтез измерительных систем. Л.: Энергия, 1974.
2. **Малевич И. А., Чернявский А. Ф.** Двухшкальный преобразователь время — код на двух стабилизированных по частоте рециркуляционных генераторах.— Автометрия, 1974, № 3.
3. **Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.** Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.— УФН, 1970, т. 102, вып. 3.
4. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятности. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию 7 августа 1977 г.;
окончательный вариант — 10 сентября 1980 г.

УДК 62-501.72

К. В. ИСАЕВ
(Ростов-на-Дону)

ОБ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

При идентификации динамических объектов большое распространение получили линейные регрессионные модели [1, 2] вида

$$\tilde{y}(t) = B^{\mathrm{T}}[x(t)]c^* + e(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — вход объекта; $B[\cdot]$ — n-вектор базисных преобразователей (физически реализуемых операторов); c^* — n-вектор неизвестных параметров, подлежащих оцениванию; $\tilde{y}(t)$ — наблюдаемый выход объекта; $e(t)$ — независимый от остальных процессов белый шум с нулевым средним значением и автокорреляционной функцией $\sigma^2\delta(t-\tau)$ ($\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака); т — символ транспонирования. Оценка $c(t)$ параметра c^*, полученная методом наименьших квадратов по результатам наблюдения $\tilde{y}(t)$ на интервале $[t_0, t)$, является состоятельной и эффективной в классе возможных линейных по $\tilde{y}(t)$ оценок и выражается формулами:

$$c(t) = D(t)\int_{t_0}^{t} z(\tau)\tilde{y}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

$$D^{-1}(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau)z^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$