АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1981

УДК 621.391.23 : 621.376.53

В. М. ЕФИМОВ, А. Н. КОЛЕСНИКОВ, А. А. НЕСТЕРОВ
(Новосибирск)

ФИЛЬТРАЦИЯ ДЕВИАЦИОННОГО ШУМА ПРИ АМПЛИТУДНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

1. В работе анализируются предельные возможности линейной фильтрации сигнала в системе с амплитудно-импульсной модуляцией в условиях случайной девиации моментов взятия отсчетов (например, ошибки позиционирования в сканирующем автомате).

В [1, 2] рассматривался случай независимого девиационного шума в отсутствие предварительной фильтрации. Ниже получены соотношения для оптимальных пред- и послефильтров и потенциальной точности воспроизведения в условиях зависимой девиации. Для простоты рассматривается одномерная модель, однако полученные результаты допускают естественное обобщение на случай большей размерности.

2. Рассмотрим следующую схему дискретизации и восстановления сигнала: стационарный случайный процесс $x(t)$ с нулевым средним подвергается предварительной обработке фильтром $\tilde{g}(\omega)$, после чего берутся отсчеты в моменты времени $t'_k = kT + \xi_k$, где ξ_k — случайная девиация с нулевым средним. Восстановление сигнала проводится послефильтром $\tilde{f}(\omega)$, и оценка исходного сигнала имеет вид

$$\hat{x}(t) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(kT + \xi_k - \tau)\, d\tau f(t - kT), \tag{1}$$

где $g(t)$ и $f(t)$ — соответственно аппаратные функции пред- и послефильтров. При этом средний квадрат ошибки при стационарности девиационных флуктуаций

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) \Bigg[1 - 2\operatorname{Re}\{\tilde{g}(\omega)\tilde{f}(\omega)\varphi(\omega)\}/T + |\tilde{g}(\omega)|^2 \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, mT) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, |\tilde{f}(\lambda)|^2 e^{i(\omega-\lambda)mT}/2\pi T \Bigg]. \tag{2}$$

Здесь $S_x(\omega)$ — спектр мощности сигнала; $\varphi(\omega) = \langle e^{i\omega\xi_k} \rangle$ — характеристическая функция девиации; $\varphi(\omega, mT) = \langle e^{i\omega(\xi_{k+m} - \xi_k)} \rangle$ — характеристическая функция приращения девиации на m тактах.

Сделав замену переменных и найдя минимум по функции $\tilde{f}(\omega)$, получим

$$\min \langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) \Bigg[1 - S_x(\omega)\, |\tilde{g}(\omega)|^2\, |\varphi(\omega)|^2 / 2\pi T \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda S_x(\lambda) |\tilde{g}(\lambda)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, mT) e^{i(\lambda-\omega)mT} \Bigg]. \qquad (3)$$

Найдем минимум этого функционала по $\tilde{g}(\omega)$, что эквивалентно поиску максимума функционала

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) y(\omega) \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda y(\lambda) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)mT} \varphi(\lambda, mT)/|\varphi(\lambda)|^2 \qquad (4)$$

по $y(\omega) = S_x(\omega)|\tilde{g}(\omega)|^2|\varphi(\omega)|^2$ при естественном ограничении $y(\omega) \geqslant 0$. Функцию $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)mT} \varphi(\lambda, mT)/|\varphi(\lambda)|^2$ представим в виде суммы двух функций: последовательности δ-функций

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)mT} = (2\pi/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \lambda + 2\pi m/T)$$

и функции

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)mT} (\varphi(\lambda, mT) - |\varphi(\lambda)|^2)/|\varphi(\lambda)|^2,$$

уже не содержащей δ-образных членов. При этом делается естественное предположение: $\varphi(\lambda, mT) \to |\varphi(\lambda)|^2$ при $mT \to \infty$.

Обозначим

$$(T/2\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)mT} (\varphi(\lambda, mT) - |\varphi(\lambda)|^2)/|\varphi(\lambda)|^2 = b(\omega, \lambda). \qquad (5)$$

Тогда задача максимизации функционала (4) сводится к максимизации функционала

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) y(\omega) \Bigg/ \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(\omega + 2\pi m/T) + \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega, \lambda) y(\lambda) d\lambda \right), \qquad (6)$$

или же

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + 2\pi n/T) y(\omega + 2\pi n/T) \Bigg/ \Bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(\omega + 2\pi k/T) + \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega, \lambda) y(\lambda) d\lambda \Bigg) \qquad (7)$$

по $y(\omega)$ при условии $y(\omega) \geqslant 0$. Максимум функционала определяется по следующему алгоритму:

1. Для каждого $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$ определяется $\omega^* = \omega + 2\pi k_{\max}/T$, где $k_{\max}$ таково, что

$$S_x(\omega + 2\pi k_{\max}/T) = \max_k S_x(\omega + 2\pi k/T).$$

Множество $\Omega_1 = \cup\, \omega^*$ имеет меру $2\pi/T$ и представляет собой область определения оптимальных фильтров $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{g}(\omega)$ для идеального амплитудно-импульсного модулятора (без девиации) [3—5].

2. Решается система нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{cases} P(\omega) = \int\limits_{\Omega_1} b(\lambda, \omega) \left(\sqrt{S_x(\lambda) P(\lambda)/Q(\lambda)} - P(\lambda)\right) 1[S_x(\lambda) - P(\lambda) Q(\lambda)]\, d\lambda, \\ Q(\omega) = \int\limits_{\Omega_1} b(\omega, \lambda) \left(\sqrt{S_x(\lambda) Q(\lambda)/P(\lambda)} - Q(\lambda)\right) 1[S_x(\lambda) - P(\lambda) Q(\lambda)]\, d\lambda \end{cases} \qquad (8)$$

относительно функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (здесь $1[x]$ — единичная функция).

Из условия неотрицательности $y(\omega)\geqslant 0$ следует, что носитель Ω функций $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{g}(\omega)$ получается из множества Ω_1 исключением тех частот, для которых не выполняется условие $S_x(\omega)\geqslant P(\omega)Q(\omega)$.

Оптимальные фильтры $|\tilde{f}(\omega)|^2$ и $|\tilde{g}(\omega)|^2$ на множестве Ω определяются следующим образом:

$$|\tilde{g}(\omega)|^2=(\sqrt{S_x(\omega)Q(\omega)/P(\omega)}-Q(\omega))/S_x(\omega)|\varphi(\omega)|^2;$$

$$|\tilde{f}(\omega)|^2=T^2(\sqrt{S_x(\omega)P(\omega)/Q(\omega)}-P(\omega)); \tag{9}$$

вне множества Ω $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{g}(\omega)$ равны нулю. Двойной минимум среднего квадрата ошибки равен при этом

$$\min_{f,g}\langle\varepsilon^2\rangle=\int\limits_{\bar{\Omega}}S_x(\omega)\,d\omega+\int\limits_{\Omega}\sqrt{S_x(\omega)\,P(\omega)\,Q(\omega)}\,d\omega. \tag{10}$$

3. Рассмотрим частный случай с некоррелированной девиацией:

$$\varphi(\omega,mT)=\begin{cases}1, & m=0;\\ |\varphi(\omega)|^2, & m\neq 0.\end{cases}$$

Тогда система (8) преобразуется к виду

$$\begin{cases}P(\omega)=b_0(\omega)\int\limits_{\Omega_1}\left(\sqrt{S_x(\lambda)\,P(\lambda)/Q(\lambda)}-P(\lambda)\right)1\,[S_x(\lambda)-P(\lambda)\,Q(\lambda)]\,d\lambda=\mu b_0(\omega),\\ Q(\omega)=\int\limits_{\Omega_1}b_0(\lambda)\left(\sqrt{S_x(\lambda)\,Q(\lambda)/P(\lambda)}-Q(\lambda)\right)1\,[S_x(\lambda)-P(\lambda)\,Q(\lambda)]\,d\lambda=Q_0,\end{cases} \tag{11}$$

поскольку функция $b_0(\lambda)=b(\omega,\ \lambda)=(T/2\pi)(1-|\varphi(\lambda)|^2)/|\varphi(\lambda)|^2$ зависит только от одного аргумента.

Множество Ω получается из множества Ω_1 исключением тех частот, на которых отношение спектра мощности к функции $b_0(\lambda)$ меньше величины γ^2:

$$S_x(\lambda)/b_0(\lambda)<\gamma^2,$$

где

$$\gamma=\int\limits_{\Omega}\sqrt{S_x(\lambda)\,b_0(\lambda)}\,d\lambda\Big/\left(1+\int\limits_{\Omega}b_0(\lambda)\,d\lambda\right)=\sqrt{\mu Q_0}. \tag{12}$$

Предельная ошибка

$$\min_{f,g}\langle\varepsilon^2\rangle=\int\limits_{\bar{\Omega}}S_x(\omega)\,d\omega+\left[\int\limits_{\Omega}\sqrt{S_x(\omega)\,b_0(\omega)}\,d\omega\right]^2\Big/\left(1+\int\limits_{\Omega}b_0(\omega)\,d\omega\right). \tag{13}$$

Решение для данного частного случая аналогично решению, полученному в [6] для фильтров в системе с аддитивным шумом на амплитудно-импульсном модуляторе, но без девиации отсчетов, и сводится к подбору соответствующего порога γ.

Для систем, не слишком сильно отличающихся от идеальных, ограничение из-за неотрицательности функции $y(\omega)$ не скажется на множестве частот Ω. Например, для унимодальных спектров искомое множество представляет собой интервал $[-\pi/T,\ \pi/T]$, если

$$\sigma_\xi^2\leqslant\sqrt{4S_x(\pi/T)}\Big/\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\sqrt{S_x(\omega)\,\omega^2}\,d\omega$$

($\sigma_\xi^2=\langle\xi_k^2\rangle$ — дисперсия девиации).

Вообще же при достаточно малых σ_ξ отсчет, взятый с временной ошибкой, можно разложить по степеням девиации, ограничившись первыми двумя членами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(kT-\tau)\, g(\tau)\, d\tau + \xi_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(kT-\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

и рассматривать второе слагаемое как прошедший через предфильтр некоррелированный с сигналом аддитивный шум. Нетрудно показать, что это эквивалентно разложению функции $b_0(\omega)$ до второго порядка по частоте.

4. Оценим выигрыш от применения совместной оптимальной фильтрации по сравнению с одной оптимальной послефильтрацией. Рассмотрим случай, когда шаг дискретизации мал по сравнению с обратной характерной полосой сигнала, а спектр мощности унимодален.

Средний квадрат ошибки оценивания с помощью оптимального послефильтра равен [2]:

$$\min_f \langle \varepsilon^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) \left[1 - S_x(\omega)\, |\varphi(\omega)|^2 \middle/ \left((T/2\pi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda S_x(\lambda)\, (1 - |\varphi(\lambda)|^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + 2\pi k/T)\, |\varphi(\omega + 2\pi k/T)|^2 \right) \right]. \qquad (14)$$

В предположении достаточной малости девиации по сравнению с шагом дискретизации

$$\min_f{}^2 \langle \varepsilon \rangle \cong 2 \int\limits_{|\omega| \geqslant \pi/T} S_x(\omega)\, d\omega + \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, (1 - |\varphi(\omega)|^2)\, d\omega; \qquad (15)$$

$$\min_{f,g} \langle \varepsilon^2 \rangle = \int\limits_{|\omega| \geqslant \pi/T} S_x(\omega)\, d\omega + \left[\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} \sqrt{S_x(\omega)\, b_0(\omega)}\, d\omega \right]^2 \middle/ \int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega / |\varphi(\omega)|^2. \qquad (16)$$

Сравнение показывает, что «дискретные» составляющие ошибки различаются в два раза, что же касается девиационных составляющих, то в силу неравенства Коши — Шварца и конечности пределов интегрирования во втором слагаемом в выражении (16) $\min\limits_{f,g} \langle \varepsilon_\xi^2 \rangle \leqslant \min\limits_f \langle \varepsilon_\xi^2 \rangle$. Равенство достигается при спектре с точностью до коэффициента, равном функции $b_0^{-1}(\omega)$ на интервале $[-\pi/T;\ \pi/T]$ и нулю вне его.

5. Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации при $T \to 0$ в предположении малости девиации по сравнению с характерными обратными частотами сигнала. В таком случае характеристическую функцию приращения девиации с достаточной точностью можно представить двумя первыми членами разложения:

$$|\varphi(\omega)|^2 \cong 1 - \omega^2 \sigma_\xi^2,$$
$$\varphi(\omega, mT) \cong 1 - \omega^2 \sigma_\xi^2 + \omega^2 K_\xi(mT), \qquad (17)$$

где $K_\xi(mT) = \langle \xi_k \xi_{k+m} \rangle$ — корреляционная функция девиации. Соответственно функция $b(\omega, \lambda)$ представится в виде

$$b(\omega, \lambda) \cong (T/2\pi)\, \lambda^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_\xi(mT)\, e^{i(\lambda-\omega)mT} \qquad (18)$$

или после ввода спектра мощности девиации $S_\xi(\omega)$ —

$$b(\omega, \lambda) = \lambda^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_\xi(\lambda - \omega + 2\pi m/T). \qquad (19)$$

Осуществляя предельный переход $T \to 0$, окончательно получим

$$\min_f \langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) \left[1 - |\tilde{g}(\omega)|^2 \Bigg/ \left(|\tilde{g}(\omega)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times S_\xi(\lambda - \omega) |\tilde{g}(\lambda)|^2 (S_x(\lambda)/S_x(\omega))\, d\lambda \right) \right]. \qquad (20)$$

Нетрудно видеть, что в случае отсутствия корреляции девиации ошибка оценивания полностью устраняется $\left(\min_f \langle \varepsilon^2 \rangle = 0\right)$.

Алгоритм дальнейшей минимизации среднего квадрата ошибки аналогичен описанному выше с тем отличием, что в данном случае множество Ω_1, очевидно, представляет собой всю ось частот.

6. Таким образом, оптимальная предварительная фильтрация позволяет существенно уменьшить не только ошибку, связанную с процессом дискретизации, но и девиационный шум.

В заключение заметим, что аналогичным методом решается также задача оптимальной фильтрации в присутствии аддитивного шума на входе и на модуляторе при наличии девиации отсчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Balakrishnan A. V.** On the Problem of Time Jitter in Sampling.— IRE Trans. on Info Theory, 1962, vol. IT-8, N 3.
2. **Leneman O. A. Z.** Random Sampling of Random Processes: Optimum Linear Interpolation.— J. of Franklin Institute, 1966, vol. 281, p. 302.
3. **Robbins H. M.** An Extension of Wiener Filter Theory to Partly Sampled Systems.— IRE Trans. on Circuit Theory, 1959, vol. CT-6, N 4.
4. **Brown M. W.** Optimum Prefiltering of Sampled Data.— IRE Trans. on Info Theory, 1961, vol. IT-7, N 4.
5. **Немировский А. С., Немировский М. С.** Оптимальная интерполяция случайных процессов рядами Котельникова.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 1.
6. **Chan D., Donaldson R. W.** Optimum Prefiltering of Sampled Signals with Application to Pulse Modulation and Data Compression Systems.— IEEE Trans. on Comm. Technol., 1971, vol. COM-19, N 2.

Поступила в редакцию 17 сентября 1980 г.

УДК 51.681.14.155

Ю. М. ВОРОНИН, Н. Н. КРАСИЛЬНИКОВ

(Ленинград)

О РАЗЛИЧЕНИИ НАБЛЮДАТЕЛЕМ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ФОНЕ ГЛАДКОЙ ПОМЕХИ

Известно, что в зрительной системе наблюдателя протекают как линейные, так и нелинейные процессы. Первыми обусловлены такие явления, как пространственная и временная суммации, а также усреднение (фильтрация) помех во времени и в пространстве при обнаружении, различении и опознавании зашумленных изображений, вторыми — явление адаптации зрительной системы к средней яркости наблюдаемого изображения, а также нелинейность характеристики восприятия яркости.

В работах [1—3] было показано, что при различении относительно малоконтрастных изображений зрительная система наблюдателя доста-