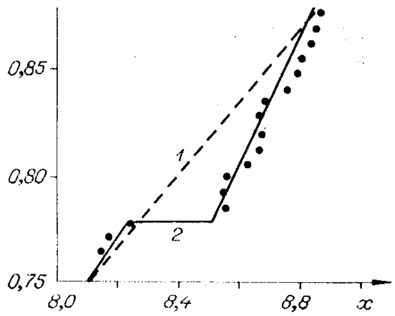

разбиению подвергается один или ограниченное число интервалов с наибольшими значениями остаточных сумм квадратов отклонений. Завершающим является этап, после которого погрешность аппроксимации не превосходит заданной.

Предложенные алгоритмы легко реализуются на ЭВМ и эффективно дополняют известные средства построения функций распределения по экспериментальным данным, особенно при сложных многомодальных распределениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цыпкин Я. З.** Применение метода стохастической аппроксимации к оценке неизвестной плотности распределения по наблюдениям.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 3.
2. **Битус А. К., Овсянников В. А.** Адаптивные алгоритмы измерения законов распределения случайных процессов.— В кн.: Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов. (Труды V Всесоюз. симпозиума). Ленинград — Вильнюс, 1972, с. 126—131.
3. **Бланк Б. Г.** Адаптивный алгоритм кусочной аппроксимации плотности вероятностей.— АВТ, 1977, № 3.
4. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 13 апреля 1979 г.

УДК 517.512.2

Т. М. БАНДМАН

(Новосибирск)

КЛАСС ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ФАЗЕ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Известная фазовая проблема в оптике заключается в следующем: как восстановить функцию $f(x)$, заданную на конечном интервале действительной оси, по модулю $\varphi(\eta)$ ее преобразования Фурье $\widehat{f}(\eta)=\varphi(\eta)e^{i\psi(\eta)}$. Если функция $f(x)$ четная или продолжение $\widehat{f}(z)$ на комплексную плоскость ее преобразования Фурье $\widehat{f}(\eta)$ не имеет корней в верхней или нижней полуплоскости, эта проблема решается однозначно [1—3]. Но не менее важна и обратная задача: определение функции $f(x)$ по фазе $\psi(\eta)$ ее преобразования Фурье. Она встречается, например, в вопросах синтеза фазовых фильтров, наблюдения предмета через полупрозрачную среду и др. В этом случае даже для четных функций $f(x)$ однозначное восстановление их по фазе $\psi(\eta)$, вообще говоря, невозможно.

В этой статье описан класс H четных функнций $f(x)$, у которых все корни преобразований Фурье $\widehat{f}(z)$ лежат на действительной оси. Кроме того, все функции этого класса однозначно восстанавливаются не только по модулю, но и по фазе их преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ — четная ограниченная функция, сосредоточенная на интервале $[-1,1]$ (т. е. $f(x)=0$ для всех x, $|x|>1$). Ее преобразование Фурье $\hat f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{izx}dx$ является четной целой функцией комплексной переменной $z=\eta+i\zeta$, представимой в виде произведения $\hat f(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-z^2a_k^{-2}\right)$, где числа $\pm a_k$ — ее корни.

Фазой преобразования Фурье $\hat f(z)$ назовем функцию $\psi(\eta)$ вещественной переменной $\eta\in(-\infty,\infty)$, удовлетворяющую условиям:

1) сужение на действительную ось $\{z=\eta\}$ функции $\hat f(z)$ есть $\hat f(\eta)=|\hat f(\eta)|e^{i\psi(\eta)}$;

2) $0\leqslant\psi(\eta)<2\pi$ для всех η.

Пусть

$$I(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Через H обозначим множество всех четных вещественных функций $f(x)$ вещественной переменной x, таких, что:

1) разность $g(x)=f(x)-I(x)=0$ при $|x|>1$,

2) $g(x)$ дважды дифференцируема во всех точках $x\in(-\infty,\infty)$,

3) $g''(x)\in L^1(-\infty,\infty)$,

4) $\int\limits_{-1}^{1}|g'(x)|\,dx<2$.

Теорема. Преобразование Фурье $\hat f(z)$ функции $f(x)$ из множества H обращается в нуль лишь на действительной оси, и все его нули имеют кратность 1.

Из этой теоремы сразу следует, что все функции $f(x)\in H$ можно восстановить по фазе их преобразования Фурье. Действительно, пусть $\psi(\eta)$ — фаза функции $\hat f(z)$. Так как кратность всех нулей равна 1 и сужение $\hat f(\eta)$ на действительную ось $\{z=\eta\}$ функции $\hat f(z)$ вещественно ($f(x)$ четна), фаза $\psi(\eta)$ задается равенствами:

$$\psi(\eta)=\begin{cases}0, & \hat f(\eta)\geqslant 0;\\ \pi, & \hat f(\eta)<0.\end{cases}$$

Пусть $\{\pm a_k\}$ — последовательность точек разрыва функции $\psi(\eta)$ и $\omega(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-z^2a_k^{-2}\right)$. Тогда $\hat f(z)=c\omega(z)$, где c — некоторая вещественная постоянная. Поэтому обратное преобразование Фурье $\check\omega(x)$ сужения $\omega(\eta)$ функции $\omega(z)$ на действительную ось определено и $f(x)=c\,\check\omega(x)$. Число c можно найти из условия нормировки $f(1)=1$.

Напомним некоторые определения и факты, которые используются в доказательстве теоремы (подробнее см. [4]).

Порядком целой функции $h(z)$ называется число

$$\rho_h=\overline{\lim_{r\to\infty}}(r)^{-1}\left(\ln\ln\max_{|z|=r}|h(z)|\right).$$

Если $\rho_h=1$, то степенью σ_h функции $h(z)$ называется число

$$\sigma_h=\overline{\lim_{r\to\infty}}(r)^{-1}\left(\ln\max_{|z|=r}|h(z)|\right).$$

По теореме Пэли — Винера ([5], с. 125) для преобразования Фурье $\hat f(z)$ функции $f(x)$, сосредоточенной на интервале $[-1,1]$, $\rho_{\hat f}=\sigma_{\hat f}=1$.

Если $\sigma_h = 0$, $h(z)$ называется функцией минимального типа. Для таких функций справедлива следующая теорема Фрагмена — Линделефа ([4], с. 71).

Если целая функция $h(z)$ не выше, чем первого порядка и минимального типа, и ее модуль ограничен на какой-нибудь прямой, то она постоянна.

Пусть для некоторой функции $h(z)$ порядка 1 и степени σ_h для почти всех $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$ существует предел $\Delta_h = \lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} n(r, \theta)$, где $n(r, \theta)$ - число корней (с учетом кратности) функции $h(z)$ в секторе $\{-\pi/2 < \arg z < \theta, |z| < r\}$. Нам понадобятся следующие факты.

1. Если $\Delta_h = 0$, то $h(z)$ — функция не выше, чем первого порядка и минимального типа.

2. Если $h(z) = h_1(z) h_2(z)$ и существуют Δ_{h_1} и Δ_h, то существует и $\Delta_{h_2} = \Delta_h - \Delta_{h_1}$.

3. Если четная функция $h(z)$ ограничена на прямой $\{\zeta = \operatorname{Im} z = 0\}$, то

$$\Delta_h = \begin{cases} 0, & \theta \leqslant 0; \\ l\pi^{-1}, & 0 < \theta \leqslant \pi; \\ 2l\pi^{-1}, & \pi < \theta \leqslant (3/2)\pi, \end{cases}$$

где $l = \varlimsup\limits_{|\zeta|\to\infty} |\zeta|^{-1} \ln |h(i\zeta)|$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in H$. Тогда ее преобразование Фурье $\widehat{f}(z)$ является четной целой функцией, ограниченной на действительной оси, и $\widehat{f}(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - z^2 a_k^{-2})$. Наша цель — доказать, что все числа a_k вещественны и встречаются в этом произведении только один раз.

Лемма 1. Сужение $\widehat{g}(\eta)$ преобразования Фурье $\widehat{g}(z)$ разности $g(x) = f(x) - I(x)$ удовлетворяет неравенству $|\widehat{g}(\eta)| < 2|\eta|^{-1}$.

Действительно,

$$|\widehat{g}(\eta)| = \left| \int_{-1}^{1} g(x) \cos(\eta x)\, dx \right| = \left| \eta^{-1} \Big|_{-1}^{1} \sin(\eta x)\, g(x) - \eta^{-1} \int_{-1}^{1} g'(x) \times \right.$$
$$\left. \times \sin(\eta x)\, dx \right| \leqslant |\eta|^{-1} \int_{-1}^{1} |g'(x)|\, dx \leqslant 2|\eta|^{-1}.$$

Лемма 2. На каждом интервале $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$ функция $\widehat{f}(\eta)$ имеет, по крайней мере, один корень.

Доказательство. Достаточно показать, что функция $\widehat{f}(\eta)$ имеет разные знаки на концах этих интервалов:

$$\widehat{f}(-\pi/2 + k\pi) = [2 \sin(-\pi/2 + k\pi)]/(-\pi/2 + k\pi) +$$
$$+ \widehat{g}(-\pi/2 + k\pi) = (-1)^k (-\pi/2 + k\pi)^{-1} + \widehat{g}(-\pi/2 + k\pi);$$
$$\widehat{f}(\pi/2 + k\pi) = [2 \sin(\pi/2 + k\pi)]/(\pi/2 + k\pi) +$$
$$+ \widehat{g}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^{k+1} (\pi/2 + k\pi)^{-1} + \widehat{g}(\pi/2 + k\pi).$$

По лемме 1 $\operatorname{sign} \widehat{f}(-\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$, $\operatorname{sign} \widehat{f}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^{k+1}$.

Лемма 3. Пусть $\{\pm b_k\}$ — подпоследовательность корней функции $\widehat{f}(z)$, такая, что $b_k \in [-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$, и пусть $\delta_k = k\pi - b_k$. Тогда, начиная с некоторого k_0, выполняется неравенство $\delta_k < 2Nk^{-1}$, где $N = \int_{-1}^{1} |g''(x)|\,dx$.

Доказательство. Аналогично лемме 1, дважды интегрируя по частям, можно показать, что $|\widehat{g}(\eta)| < 2N|\eta|^{-2}$ для всех η. Поэтому

$$2|\sin b_k|(b_k)^{-1} = |\widehat{g}(b_k)| < 2N(b_k)^{-2};$$

$$|\sin \delta_k| = |\sin b_k| < N(b_k)^{-1} < 2N(k\pi)^{-1}.$$

Так как $|\delta_k| < \pi/2$, из этого неравенства следует, что

$$|\delta_k| < 2|\sin \delta_k| < 4N(k\pi)^{-1} < 2Nk^{-1},\ k \geqslant k_0.$$

Пусть теперь $F(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - z^2 b_k^{-2}\right)$. Тогда $\widehat{f}(z) = F(z)G(z)$, где $G(z)$ - некоторая целая функция. Пользуясь теоремой Фрагмена — Линделефа, покажем, что $G(z)$ постоянна. Для этого вычислим $\Delta_G = \Delta_{\widehat{f}} - \Delta_F$. Как уже отмечалось, функция $\widehat{f}(z)$ четна, ограничена на действительной оси и $\rho_{\widehat{f}} = \sigma_{\widehat{f}} = 1$. Поэтому

$$\Delta_{\widehat{f}} = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < \theta \leqslant 0; \\ 1/\pi, & 0 < \theta \leqslant \pi; \\ 2/\pi, & \pi < \theta \leqslant (3/2)\pi. \end{cases}$$

По построению функция $F(z)$ имеет ровно один корень на каждом интервале $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$, следовательно, $\Delta_{\widehat{f}} = \Delta_F$ и $\Delta_G = 0$, т. е. функция $G(z)$ является функцией не выше, чем первого порядка и минимального типа.

Лемма 4. Функция $G(z)$ ограничена на мнимой оси $\{z = i\zeta\}$.

Доказательство. $|G(i\zeta)| = |\widehat{f}(i\zeta)|\ |F(i\zeta)|^{-1}$. Оценим функции $|\widehat{f}(i\zeta)|$ и $|F(i\zeta)|$ сверху и снизу соответственно. При $\zeta > 0$

$$|\widehat{f}(i\zeta)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x)\,e^{-\zeta x}\,dx\right| = \left|-\zeta^{-1}\Big|_{-1}^{1} f(x)\,e^{-\zeta x} + \zeta^{-1}\int_{-1}^{1} f'(x)\,e^{-\zeta x}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2|\sin\zeta|\,\zeta^{-1} + e^{\zeta}\zeta^{-1}\left|\int_{-1}^{1} g'(x)\,e^{-\zeta(x+1)}dx\right| \leqslant \zeta^{-1}e^{\zeta}\left[2\left(1 - e^{-2\zeta}\right) + 2\right] \leqslant 4e^{\zeta}\zeta^{-1}.$$

Так как $\widehat{f}(i\zeta) = \widehat{f}(-i\zeta)$, это значит, что $|\widehat{f}(i\zeta)| < 4e^{|\zeta|}|\zeta|^{-1}$.

Чтобы оценить $|F(i\zeta)|$, рассмотрим отношение

$$|F(i\zeta)|\,|\zeta^{-1}\sin\zeta|^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \zeta^2 b_k^{-2}\right)\left(1 + \zeta^2(\pi k)^{-2}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left|1 - \left(\pi^2k^2 - b_k^2\right)(\pi^2k^2 + \zeta^2)^{-1}\right| \prod_{k=1}^{\infty}\pi^2k^2b_k^{-2} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left|1 - |\pi^2k^2 - b_k^2|\,(\pi k)^{-2}\right| \prod_{k=1}^{\infty}\pi^2k^2b_k^{-2}.$$

Так как $|\pi^2k^2 - b_k^2|/\pi^2k^2 = |b_k + \pi k|\ |\delta_k|/\pi^2k^2 \leqslant (\pi k + \pi/2)\ |\delta_k|/\pi^2k^2 \leqslant 4N/\pi^2k^2$, а $(\pi k)(b_k)^{-1} = 1 + \delta_k b_k^{-1}$ и $|\delta_k b_k^{-1}| < 2Nk^{-2}$, оба произведения в правой части неравенства сходятся. Поэтому $|F(i\zeta)| \geqslant c''|\zeta^{-1}\sin\zeta| > c'|\zeta|^{-1}e^{|\zeta|}$ для некоторой постоянной c'. Отсюда

$$|G(i\zeta)| = |\hat{f}(i\zeta)||F(i\zeta)|^{-1} \leqslant 4e^{|\zeta|}|\zeta|^{-1}/c'e^{|\zeta|}|\zeta|^{-1} \leqslant 4/c'.$$

Следовательно, модуль функции $G(z)$ ограничен на мнимой оси.

Теперь доказательство теоремы очевидно. По теореме Фрагмена — Линделефа функция $G(z)$ постоянна и $\hat{f}(z) = cF(z)$. По построению все корни функции $F(z)$ лежат на действительной оси и имеют кратность 1.

Замечание. Условие 4 в определении класса H существенно и не является нормировкой. Например, функция $f(x) = I(x) + \check{g}(x)$, где $\check{g}(x)$ равна обратному преобразованию Фурье функции

$$g(z) = z^{-1}(5\pi^2z^2 - 4\pi^4 + 4)(\pi^2 - z^2)^{-1}(4\pi^2 - z^2)^{-1}\sin z,$$

удовлетворяет условиям 1—3, но ее преобразование Фурье

$$\hat{f}(z) = [(z^4 + 1)\sin z]/[z(\pi^2 - z^2)(4\pi^2 - z^2)]$$

имеет четыре корня, не лежащих на действительной оси.

Можно, однако, показать, что если разность $g(x) = f(x) - I(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, то преобразование Фурье $\hat{f}(z)$ функции $f(x)$ имеет не более $2\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}|g''(x)|\,dx + 1\right]$ невещественных корней.

Заключение. Доказано, что преобразование Фурье четной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям:

1) разность $g(x) = f(x) - I(x) = 0$ при $|x| > 1$,
2) $g(x)$ дважды дифференцируема во всех точках $x \in (-\infty, \infty)$,
3) $g''(x) \in L^1(-\infty, \infty)$,
4) $\int\limits_{-1}^{1}|g(x)|\,dx < 2$,

где $I(x)$ — «ступенька» высоты 1, имеет только вещественные корни. Все эти функции однозначно восстанавливаются по модулю или по фазе их преобразований Фурье.

Автор приносит благодарность Р. Д. Баглаю за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wolf E.** Is a Complete Determination of Energy Spectrum of Light Possible from Measurement of the Degree of Coherence? — Proc. Phys. Soc. London, 1962, vol. 80, p. 6, N 518, p. 1269—1272.
2. **Nussenzveig H. M.** Phase Problem in Coherence Theory.— J. Math. Phys., 1967, vol. 8, p. 561—566.
3. **Burge R. E., Fiddy M. A., Greenway A. H., Ross G.** The Phase Problem.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1976, vol. 350, N 1661, p. 191—212.
4. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
5. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 10 января 1980 г.