ЛИТЕРАТУРА

1. **Numerical** Methods for Non-Linear Optimization/Ed. by F. A. Lootsma. L.— N.— Y.: Acad. Press, 1972.
2. **Численные** методы условной оптимизации/Под ред. Ф. Гилла, У. Мюррея. М.: Мир, 1977.
3. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
4. **Jchida K., Fujii Y.** An Interval Arithmetic Method for Global Optimization.— Computing, 1979, vol. 23, p. 1—23.
5. **Hesse R. A.** A Suboptimal Method for Global Solution of the Non-Linear Programming Problem.— Report N COD-1449-16. St. Louis, Missouri: Washington University, 1971.
6. **Zwart P. B.** Non-Linear Programming: Global use of the Lagrangian.— J. Optim
10. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968, гл. 18, 19.
11. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
12. **Brent R. P.** Algorithms for Minimization Without Derivatives. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1973.
13. **Hill B. C., Schubert E. D., Nokes M. A., Michelson R. P.** Laser Interferometer Measurement of Changes in Crayfish Axon Diameter Concurrent with Action Potential.— Science, 1977, vol. 196, p. 426—428.

Поступила в редакцию 26 февраля 1980 г.

УДК 62.506 : 518.3

Б. Г. БЛАНК

(Ленинград)

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕ СТРОГО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В известных методах аппроксимации функций распределения [1—3] и других относительно последних обычно предполагается строгая монотонность, которая необходима для обеспечения требуемой точности при ограничениях на число участков аппроксимации. Однако строгая монотонность не всегда имеет место, в особенности при распределениях, более сложных, чем унимодальные. Применение в указанных случаях стандартных методов аппроксимации может привести к значительному числу интервалов разбиения области определения функции распределения либо, как упоминалось выше, к значительной погрешности при ограничениях на число участков аппроксимации. Последнее обстоятельство связано с ограничениями на объем используемой памяти ЭВМ, что в ряде случаев представляется весьма существенным.

В настоящей работе рассматривается задача наилучшей в отношении среднеквадратической погрешности кусочно-линейной аппроксимации функций распределения, главным образом не строго монотонных, при ограничениях на число участков аппроксимации либо на величину допустимой погрешности.

К рассматриваемой задаче может приводить также задача выделения информативных участков экспериментальных кривых в случаях, когда экспериментальные данные предварительно интегрируются, а результат рассматривается как вариационный ряд.

Поставим в соответствие членам вариационного ряда экспериментальных данных $x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_{l+k}, \ldots, x_{l+m}, \ldots, x_N$ последовательность эмпирических точек (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, таких, что $y_i = i/N$. Тогда зависимость $y = y(x)$ является соответствующей эмпирической функцией распределения и задача состоит в аппроксимации этой зависимости.

Выделим некоторый участок функции y, описываемый точками (x_i, y_i), где $i \in [l, l+m]$. Как известно [4], линейной функцией наилучшего среднеквадратического приближения к величине y на данном участке является эмпирическая прямая регрессии, определяемая уравнением

$$\Lambda(x) = r(S_y/S_x)(x - \bar{x}) + \bar{y},$$

где $r = \mu/(S_x S_y)$ — эмпирический коэффициент корреляции; μ — эмпирический корреляционный момент; $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y — соответственно эмпирические средние и среднеквадратические отклонения на указанном участке. При этом для суммы квадратов отклонений справедливо соотношение

$$\sum_{i=l}^{l+m} v_i^2 = \sum_{i=l}^{l+m} (y_i - \Lambda(x_i))^2 = mS_y^2(1 - r^2).$$

Разбиваем выделенный участок произвольным образом на две части так, что интервал области значений функции $y[l/N, (l+m)/N]$ распадается на два подынтервала $[l/N, (l+k)/N]$ и $[(l+k+1)/N, (l+m)/N]$, и на каждой части строим линейные функции наилучшего среднеквадратического приближения к y, обозначая их $\Lambda'(x)$ и $\Lambda''(x)$ соответственно.

Тогда для величины уменьшения погрешности приближения вследствие разбиения участка аппроксимации имеем

$$\delta v^2_{\text{разб}} = \sum_{i=l}^{l+m} (y_i - \Lambda(x_i))^2 - \sum_{i=l}^{l+k} (y_i - \Lambda'(x_i))^2 - \sum_{i=l+k+1}^{l+m} (y_i - \Lambda''(x_i))^2 =$$

$$= m\left[\left(S_y^2 - \frac{k}{m} S_y^2 - \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) S_y''^2\right) - \left(S_y^2 r^2 - \frac{k}{m} S_y'^2 r'^2 - \left(1 - \frac{k+1}{m}\right) S_y''^2 r''^2\right)\right]. \tag{1}$$

Здесь S_y', r' относятся к первой, а S_y'', r'' — ко второй части исходного участка.

Очевидно, что разбиение, доставляющее максимальное значение полученному выражению, является наилучшим. Однако поиск такого разбиения посредством (1) весьма трудоемок (так как обычно m достаточно велико). С целью определения более эффективного способа поиска оптимального разбиения рассмотрим (1) подробнее.

Для эмпирического корреляционного момента

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=l}^{l+m} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{m}(x_i - \bar{x}' + \bar{x}' - \bar{x})(y_i - \bar{y}' + \bar{y}'' - \bar{y}) +$$

$$+ \frac{1}{m} \sum_{i=l+k+1}^{l+m} (x_i - \bar{x}'' + \bar{x}'' - \bar{x})(y_i - \bar{y}'' + \bar{y}'' - \bar{y}) = \frac{k}{m}\mu' + \left(1 - \frac{k+1}{m}\right)\mu'' +$$

$$+ \frac{k}{m}(\bar{x}' - \bar{x})(y' - \bar{y}) + \left(1 - \frac{k+1}{m}\right)(\bar{x}'' - \bar{x})(y'' - \bar{y}).$$

Так как $\bar{y} = (l + m/2)/N$, $\bar{y}' = (l + k/2)N$, $\bar{y}'' = (l + (m+k+1)/2)/N$, то при достаточно больших k и m справедливо соотношение

$$\mu \simeq (k/m)\mu' + (1 - (k+1)/m)\mu'' + (m/2N)(k/m)(1 - (k+1)/m)(\bar{x}'' - \bar{x}'). \tag{2}$$

Для эмпирической дисперсии аналогично можно получить

$$S_x^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=l}^{l+m} x_i^2 - \frac{m+2}{m}\bar{x}^2 \simeq \frac{k}{m} S_x'^2 + \left(1-\frac{k+1}{m}\right) S_x''^2 + \frac{k}{m}\left(1-\frac{k+1}{m}\right)(\bar{x}''-\bar{x}')^2. \tag{3}$$

Введя обозначения $k/m=\alpha$, $1-(k+1)/m=\beta$, $\bar{x}''-\bar{x}'=\xi$, из (2) имеем

$$r^2S_x^2S_y^2-\alpha^2r'^2S_y'^2S_x'^2-\beta^2r''^2S_x''^2S_y''^2=\frac{m}{N}\alpha\beta\xi\left(\mu-\frac{m}{4N}\alpha\beta\xi\right)+2\alpha\beta r'r''S_x'S_x''S_y'S_y''. \tag{4}$$

С другой стороны, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{gathered} r^2S_x^2S_y^2-\alpha^2r'^2S_x'^2S_y'^2-\beta^2r''^2S_x''^2S_y''^2=\left(S_x^2+\alpha S_x'^2+\beta S_x''^2\right)\left(r^2S_y^2-\alpha r'^2S_y'^2-\right. \\ \left.-\beta r''^2S_y''^2\right)-\left(\alpha S_x'^2+\beta S_x''^2\right)r^2S_y^2+S_x^2\left(\alpha r'^2S_y'^2+\beta r''^2S_y''^2\right)+\alpha\beta\left(S_y'^2S_x''^2r'^2-\right. \\ \left.-S_y''^2S_x'^2r''^2\right)=\left(S_x^2-\alpha\beta\xi^2\right)\left(r^2S_y^2-\alpha r'^2S_y'^2-\beta r''^2S_y''^2\right)+\alpha\beta\xi^2r^2S_y^2+ \\ +\alpha\beta\left(S_y'^2S_x''^2r'^2-S_y''^2S_x'^2r''^2\right). \end{gathered}$$

Тогда с учетом (4)

$$S_y^2r^2-\alpha^2S_y'^2r'^2-\beta^2S_y''^2r''^2=\frac{\frac{m}{N}\alpha\beta\xi\left(\mu-\frac{m}{4N}\alpha\beta\xi\right)-\alpha\beta\xi^2r^2S_y^2-}{S_x^2-\alpha\beta\xi^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-\alpha\beta\left(S_y'^2S_x''^2r'^2-S_y''^2S_x'^2r''^2\right)^2}{}. \tag{5}$$

Аналогично (3) имеем $S_y^2-\frac{k}{m}S_y'^2-\left(1-\frac{k+1}{m}\right)S_y''^2\simeq\alpha\beta\frac{m^2}{4N^2}$. Учитывая, теперь, что $\mu=rS_xS_y$, $S_y\simeq m/2\sqrt{3}N$, и пренебрегая последним слагаемым в числителе (5), после несложных преобразований получаем

$$\delta v^2_{\text{разб}}(\xi,\alpha\beta)\simeq\frac{m^3\alpha\beta\left(S_x-\frac{r}{\sqrt{3}}\xi\right)^2}{4N^2\left(S_x^2-\alpha\beta\xi^2\right)}=\frac{\alpha\beta\xi^2m^3\left(\frac{S_x}{\xi}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2}{4N^2\left(S_x^2-\alpha\beta\xi^2\right)}. \tag{6}$$

Здесь от каждого конкретного разбиения зависят только α, β и рекуррентно вычисляемая величина ξ и на этом могут быть основаны способы поиска оптимального разбиения.

Для частной производной по ξ имеем

$$\frac{\partial\delta v^2_{\text{разб}}}{\partial\xi}=\frac{m^2\alpha\beta S_x\left(S_x-\frac{r}{\sqrt{3}}\xi\right)\left(\alpha\beta\xi-\frac{r}{\sqrt{3}}S_x\right)}{2N^2\left(S_x^2-\alpha\beta\xi^2\right)^2}.$$

Из соотношения (2) следует $\alpha\beta\xi-(r/\sqrt{3})S_x\leqslant 0$, поэтому знак производной зависит от знака величины $S_x-(r/\sqrt{3})\xi$.

В рассматриваемом случае существенно не строго монотонных функций распределения, когда внутри выделенного участка существует, по крайней мере, одна значительная область постоянства функции; величина $\delta v^2_{\text{разб}}$ возрастает с увеличением ξ, поскольку $S_x-(r/\sqrt{3})\xi\leqslant 0$.

Таким образом, разбиение, доставляющее максимальное значение величине $\alpha\beta\xi^2=k(m-k-1)(\bar{x}''-\bar{x}')^2/m^2$, совпадает или достаточно близко к оптимальному.

Исходя из этого для разбиения выделенного участка аппроксимируемой функции, можно предложить процедуру, основанную на вычислении значений величины $k(m-k-1)(\bar{x}''-\bar{x}')^2$ для всех $k(k=1,\ 2,\ \ldots$

$\ldots, m-1$) и реализации условия

$$z(m-z-1)\left(\bar{x}''_z-\bar{x}'_z\right)^2=\max_k k(m-k-1)\left(\bar{x}''-\bar{x}'\right)^2;\ z,\ k\in[1,\ m-1], \tag{7}$$

где z — граница окончательного разбиения интервала, причем в процессе вычислений могут использоваться рекуррентные соотношения

$$\bar{x}'_k=\frac{k\bar{x}'_{k-1}+x_{l+k}}{k+1},\quad \bar{x}''_k=\frac{(m-k+1)\,\bar{x}''_{k-1}-x_{l+k}}{m-k},\quad \bar{x}'_0=\bar{x}''_0=\bar{x}.$$

Заметим, что при $x_{t+1}-x_t=\mathrm{const}$, $t\in[l,\ l+m-1]$ указанное условие приводит к разбиению на равновероятные интервалы, а при наличии внутри разбиваемого участка отдельной значительной области постоянства эмпирической функции распределения ($x_{h+1}-x_h\gg x_{t+1}-x_t$; $h,\ t\in[l,\ l+m-1]$) граница разбиения, согласно (7), совпадает с точкой существования указанной области постоянства ($z=h$).

Задача наилучшего среднеквадратического приближения не строго монотонных функций распределения при заданном числе η участков аппроксимации может быть решена поэтапным применением предложенной процедуры.

Алгоритм состоит в следующем. На каждом из $T=E(\log_2\eta)$ этапов, где $E(\varepsilon)$ означает целую часть ε, проводится последовательный просмотр вариационного ряда и разбиение интервалов области значений предыдущего этапа в соответствии с (7). На первом этапе осуществляется разбиение всей области значений $[0,\ 1]$ на две части. На последнем $(T+1)$-м этапе проводится разбиение $\rho=\eta-2^T$ интервалов с наибольшей суммой квадратов отклонений от соответствующих линейных функций.

$$y_j(x)=(A_j/N)(x-x_{\text{нач}\,j})+z_j/N,\ x\in[x_{\text{нач}\,j},\ x_{\text{нач}\,j+1}],\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \eta,$$

где

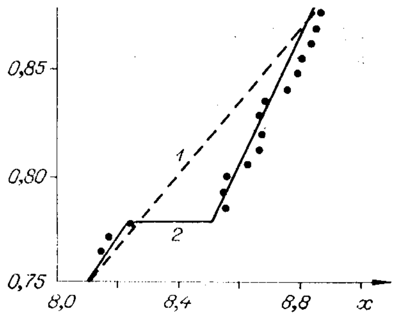
$$A_j=\frac{\sum\limits_i ix_i-\sum\limits_i x_i\sum\limits_i i/(z_{j+1}-z_j)}{\sum\limits_i x_i^2-\left(\sum\limits_i x_i\right)^2\Big/(z_{j+1}-z_j)},\quad i\in[z_j+1,\ z_{j+1}];$$

$$x_{\text{нач}\,j}=\left(z_j-\sum_i i/(z_{j+1}-z_j)\right)\Big/A_j+\sum_i x_i/(z_{j+1}-z_j);$$

z_j/N — интервалы разбиения области значений. Величины $x_{\text{нач}\,j}$ задают разбиение области определения функции распределения.

Описанный алгоритм реализован на ЭВМ «Мир-2» и апробирован при аппроксимации не строго монотонной кусочно-линейной функции распределения со случайными длинами областей постоянства и интервалов области значений, соответствующих линейным участкам. На рисунке представлен участок эмпирической функции распределения, соответствующий элементам x_i, $i=106,\ \ldots,\ 128$, вариационного ряда из 140 элементов, полученного с помощью генератора случайных чисел с не строго монотонной кусочно-линейной функцией распределения. После разбиения данного участка в соответствии с условием (7) и замены одной линейной функции наилучшего среднеквадратического приближения (прямая *1*) двумя (ломаная *2*) остаточная сумма квадратов отклонений, умноженная на $N^2=19\,600$, уменьшилась со 137,73 до 19,01. Последнее значение действительно оказалось минимальным для всех разбиений участка. При $\eta=15$ остаточная сумма квадратов, умноженная на N^2, в целом для аппроксимируемой функции в случае разбиения по условию (7) составила 132,2, тогда как в случае разбиения на равновероятные интервалы — 326,9. При $\eta=7$ соответствующие значения остаточной суммы оказались равными 251,2 и 625,8.

Задача аппроксимации не строго монотонных функций распределения минимальным числом линейных функций при заданной точности так-



разбиению подвергается один или ограниченное число интервалов с наибольшими значениями остаточных сумм квадратов отклонений. Завершающим является этап, после которого погрешность аппроксимации не превосходит заданной.

Предложенные алгоритмы легко реализуются на ЭВМ и эффективно дополняют известные средства построения функций распределения по экспериментальным данным, особенно при сложных многомодальных распределениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цыпкин Я. З.** Применение метода стохастической аппроксимации к оценке неизвестной плотности распределения по наблюдениям.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 3.
2. **Битус А. К., Овсянников В. А.** Адаптивные алгоритмы измерения законов распределения случайных процессов.— В кн.: Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов. (Труды V Всесоюз. симпозиума). Ленинград — Вильнюс, 1972, с. 126—131.
3. **Бланк Б. Г.** Адаптивный алгоритм кусочной аппроксимации плотности вероятностей.— АВТ, 1977, № 3.
4. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 13 апреля 1979 г.

УДК 517.512.2

Т. М. БАНДМАН

(Новосибирск)

КЛАСС ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ФАЗЕ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Известная фазовая проблема в оптике заключается в следующем: как восстановить функцию $f(x)$, заданную на конечном интервале действительной оси, по модулю $\varphi(\eta)$ ее преобразования Фурье $\widehat{f}(\eta)=\varphi(\eta)e^{i\psi(\eta)}$. Если функция $f(x)$ четная или продолжение $\widehat{f}(z)$ на комплексную плоскость ее преобразования Фурье $\widehat{f}(\eta)$ не имеет корней в верхней или нижней полуплоскости, эта проблема решается однозначно [1—3]. Но не менее важна и обратная задача: определение функции $f(x)$ по фазе $\psi(\eta)$ ее преобразования Фурье. Она встречается, например, в вопросах синтеза фазовых фильтров, наблюдения предмета через полупрозрачную среду и др. В этом случае даже для четных функций $f(x)$ однозначное восстановление их по фазе $\psi(\eta)$, вообще говоря, невозможно.

В этой статье описан класс H четных функнций $f(x)$, у которых все корни преобразований Фурье $\widehat{f}(z)$ лежат на действительной оси. Кроме того, все функции этого класса однозначно восстанавливаются не только по модулю, но и по фазе их преобразования Фурье.