ЛИТЕРАТУРА

1. **Гогин Н. Д.** Преобразование Адамара и сдвиг изображения.— Автометрия, 1979, № 2.
2. **Hama H., Yamashita K.** Walsh-Hadamard Power Spectra Invariant to Certain Transform Groups.— IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1979, vol. 9, p. 227.
3. **Хассе Г.** Лекции по теории чисел. М.: ИЛ, 1953.
4. **Ленг С.** Алгебра. М.: Мир, 1968.

Поступило в редакцию 25 декабря 1979 г.

УДК 621.317

В. В. ХЛОБЫСТОВ

(Киев)

К ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача в определении координат объекта для фазометрических систем заключается в том, чтобы получить однозначную оценку определяемого параметра (дальности или направляющего косинуса) по неоднозначной информации о дробных частях фазы в шкалах с различными масштабными коэффициентами [1, 2]. Способ многошкальных измерений, применяемый для устранения возникающей неоднозначности, с математической точки зрения описывается неполной системой линейных целочисленных уравнений

$$x=(k_1+\varphi_1)/d_1=(k_2+\varphi_2)/d_2=\ldots=(k_m+\varphi_m)/d_m. \qquad (1)$$

Здесь $k_i=[d_ix]^+$, $\varphi_i=\{d_ix\}^+$, $[\cdot]^+$ — операция округления до ближайшего целого, $\{\cdot\}^+$ — дробная часть числа соответственно, d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы, $0<d_1<\ldots<d_m$, d_i — целые числа, m — число шкал, x — определяемый параметр (направляющий косинус), $x\in[0, 1]$.

Наблюдаемые значения дробных частей фазы

$$\widehat{\varphi}_i=\{\varphi_i+\psi_i\}^+,$$

где ψ_i — ошибка измерения по i-й шкале,

$$\psi_i\in[-\Delta_i, \Delta_i], \quad \Delta_i\in[0, 0, 5], \quad i=\overline{1, m}.$$

Для решения сформулированной выше задачи (однозначного определения целочисленного параметра k_m и соответственно x) в инженерной практике применяется метод последовательного пересчета. Однако для использования этого метода необходимо, чтобы масштабный коэффициент d_1 первой шкалы был меньше единицы. Формирование шкалы влечет за собой увеличение ошибки, которая, в свою очередь, уменьшает вероятность правильного устранения неоднозначности в определении параметра k_m. Это является основным недостатком метода последовательного пересчета.

В работе [1] предложен алфавитный метод, не требующий формирования шкал, но алгоритм его, по существу, сводится к простому перебору, что очевидным образом снижает его эффективность. В [2] при определенных предположениях строится рекуррентная процедура для алфавитного метода, которая, естественно, улучшает его алгоритмичность. В настоящей статье предлагается еще один метод раскрытия неоднозначности фазовых измерений, который так же, как и алфавитный, не требует формирования шкал и алгоритм которого, как будет показано ниже, обладает достаточно хорошими характеристиками.

Следуя [1], вместо системы уравнений (1), рассмотрим эквивалентную систему

$$(n_i+\widehat{\varphi}_i-\psi_i)/d_i=(n_m+\widehat{\varphi}_m-\psi_m)/d_m, \quad i=\overline{1, m-1}, \qquad (2)$$

где $n_i=k_i+\delta k_i$, $\delta k_i=[\varphi_i+\psi_i]^+=0, \pm1$.

Систему (2) перепишем в виде

$$n_id_m-n_md_i+(\widehat{\varphi}_i-\psi_i)d_m-(\varphi_m-\psi_m)d_i=0, \quad i=\overline{1, m-1}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$(\widehat{\varphi}_i-\psi_i)\,d_m-(\widehat{\varphi}_m-\psi_m)\,d_i=N_i \tag{3'}$$

(N_i — некоторые целые числа). Поскольку $\psi_i\in[-\Delta_i,\,\Delta_i]$, то

$$\begin{aligned}&\alpha_i-\beta_i\leqslant N_i\leqslant\alpha_i+\beta_i,\\&\alpha_i=\widehat{\varphi}_i d_m-\widehat{\varphi}_m d_i,\\&\beta_i=\Delta_i d_m+\Delta_m d_i,\quad i=\overline{1,\ m-1}.\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим через $\overline{N}_i$ множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству (4) при фиксированном i. Тогда согласно (3)

$$\begin{gathered}n_m d_i-n_i d_m=\overline{N}_i,\quad i=\overline{1,\ m-1},\\ 0\leqslant n_i\leqslant d_i,\quad i=\overline{1,\ m}.\end{gathered} \tag{5}$$

Решение линейного диофантового уравнения (5) относительно n_m может быть записано в виде [3]

$$n_m^{(i)}=(-1)^{n-1}P_{n-1}\overline{N}_i+t_i d_m, \tag{6}$$

где P_{n-1} — числитель предпоследней подходящей дроби при разложении d_m/d_i в цепную дробь, t_i — некоторые числа из множества $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

В качестве оценки параметра n_m выберем величину

$$\widehat{n}_m=\bigcap_{i=1}^{m-1}n_m^{(i)}. \tag{7}$$

При заданной области

$$\pi\equiv\{\psi\,|\,\psi\in R_m,\ -\Delta_i\leqslant\psi_i\leqslant\Delta_i,\ i=\overline{1,\ m}\}$$

(R_m — m-мерное векторное пространство) может оказаться, что множество $\widehat{n}_m$ состоит более чем из одной точки. Если числа d_i взаимно просты, то, варьируя область π, добьемся того, что (7) будет состоять из одной точки $\widehat{n}_m^*$. Обозначим соответствующую область через π^*.

Пусть теперь погрешность $\psi=(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m)$ носит случайный характер и $W=W(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)$ — совместная, симметричная относительно оси W плотность распределения вероятностей вектора ψ в гиперкубе

$$\pi_0\equiv\{\psi\,|\,\psi\in R_m,\ \ -0{,}5\leqslant\psi_i\leqslant0{,}5,\quad i=\overline{1,\ m}\}.$$

Пусть $\Pi=\bigcup\limits_k\pi_k^*$, где π_k^* (при фиксированном k) — такое множество, для которого соответствующее множество $\widehat{n}_m$ состоит из одной точки. Поскольку ясно, что $\pi^*\subset\Pi$, то

$$P\,\{\widehat{n}_m^*=n_m\}=P\,(\psi\in\Pi)>P\,(\psi\in\pi^*)=\int\int\limits_{(\pi^*)}\cdots\int W\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)\,dt_1dt_2\ldots dt_m. \tag{8}$$

По аналогии с работой [2] можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для существования однозначной оценки x с оценкой надежности (8) необходимо и достаточно наличие не более одной точки $\psi\in R_m$, для которой система уравнений

$$\psi_m d_i-\psi_i d_m=N_i^*-\alpha_i,\quad i=\overline{1,\ m-1}, \tag{9}$$

имела бы в области π^* единственное решение. Здесь $N_i^*\in\overline{N}_i$ — целые числа, соответствующие значению $n_m^{(i)}$ в (6) при $n_m^{(i)}=\widehat{n}_m$, $\psi\in\pi^*$.

Доказательство. Итак, пусть множество π^* такое, при котором существует единственное значение параметра $\widehat{n}_m$ и соответственно единственная точка $\widehat{n}=$

$= (\widehat{n}_1, \widehat{n}_2, \ldots, \widehat{n}_m)$, удовлетворяющая системе уравнений (2), $\psi \in \pi^*$. Ясно, что определяемый параметр $x = (\widehat{n}_m + \widehat{\varphi}_m - \psi_m)/d_m$ будет единственным, если прямая (2) с текущими координатами $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ пересечет гиперпараллелепипед π^* в одной точке. Найдем необходимые для этого аналитические соотношения. Систему (3), эквивалентную системе (2) с учетом (5), перепишем в виде (9), заменив при этом $\overline{N}_i$ на N_i^* и используя второе соотношение в (4). Поскольку, как было изложено ранее, для получения однозначной оценки x прямая (2) должна пересечь гиперпараллелепипед π^* в одной точке, то это означает, что система линейных уравнений (9) должна иметь в области π^* единственное решение. Оценка (8) при этом остается в силе. Теорема доказана.

Замечание 1. Для получения лучшей оценки надежности правильного выбора параметра n_m следует вместо области π^* рассмотреть область π^{**}, являющуюся решением задачи

$$P(\pi^{**}) = \max_{\pi^* \subset \pi_0} P(\pi^*), \quad P(\pi) = P(\psi \in \pi).$$

Замечание 2. При выборе первого приближения π_1^* к множеству π^* в зависимости от вида закона распределения W возможен некоторый произвол. Так, например, если W — усеченный нормальный закон с параметрами $(0, \sigma_i)$ (что на практике встречается наиболее часто), то в качестве π_1^* можно выбрать гиперпараллелепипед с ребрами длиной $6\sigma_i$ («правило трех сигм») $-3\sigma_i \leqslant \psi_i \leqslant 3\sigma_i$, $i = \overline{1, m}$. Если при этом множество $\widehat{n}_m$ состоит из одной точки, то полагаем $\pi^* = \pi_1^*$, в противном случае в качестве следующего приближения к π^* выбираем, например, гиперпараллелепипед π_1^* с ребрами, равными $4\sigma_i (-2\sigma_i \leqslant \psi_i \leqslant 2\sigma_i)$, и т. д.

Для решения задачи максимизации оценки $P(\pi^*)$ нужно, очевидно, «расширять» область π^*, т. е. двигаться в обратном направлении, увеличивая длины ребер гиперпараллелепипеда π^* до тех пор, пока не нарушится условие того, что $\widehat{n}_m$ состоит из одной точки.

Пример 1. Рассмотрим трехшкальную систему (2) при $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 8$, $\widehat{\varphi}_1 = 0{,}21$, $\widehat{\varphi}_2 = 0{,}01$, $\varphi_3 = 0{,}2$; $\psi = (\psi_1, \psi_2, 0)$, ψ_i — независимые случайные величины с усеченной гауссовой плотностью распределения вероятностей на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$ с параметрами $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 0{,}01$, $\psi_3 = 0$.

В качестве первого приближения к области π^* выберем область $\pi_1^* = [-3\sigma, 3\sigma] \times [-3\sigma, 3\sigma]$. По формулам (4) находим $\overline{N}_1 = 1$, $\overline{N}_2 = -1$, $n_3^{(1)} = 3$, $n_3^{(2)} = 3$, $\widehat{n}_3 = k_3 = 3$. Система уравнений (9) имеет в области π_1^* единственное решение $\psi_1 = 0{,}01$, $\psi_2 = 0{,}01$.

В нашем случае система (1) примет вид

$$x = (1 + 0{,}2)/3 = (2 + 0)/5 = (3 + 0{,}2)/8 = 0{,}4.$$

При этом оценка надежности правильного определения параметра x равна

$$P\left(\pi_1^*\right) = \prod_{i=1}^{2} 2\Phi\left(\Delta_i^*/\sigma_i\right)/2\Phi\left(1/2\sigma_i\right) = [2\Phi(3)/2\Phi(50)]^2 \simeq 0{,}99,$$

$$\Phi(u) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_0^u \exp\left(-t^2/2\right) dt.$$

Пример 2. Пусть $m = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = 52$, $d_3 = 301$, $\widehat{\varphi}_1 = 0{,}21$, $\widehat{\varphi}_2 = -0{,}19$, $\widehat{\varphi}_3 = 0{,}38$; ψ_i, $i = 1, 2, 3$,— независимые случайные величины с усеченной гауссовой плотностью распределения вероятностей на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$ с параметрами $m_i = 0$, $\sigma_i = \sigma = 0{,}01$, $i = \overline{1, 2, 3}$. При $\Delta_i = 3\sigma_i = 3\sigma = 0{,}03$ по формулам (4) находим

$\overline{N}_1 = \overline{53, 71}$; $\overline{N}_2 = -\overline{87, -67}$;

$n_3^{(1)} = 118, 18, 219, 119, 19, 220, 120, 20, 221, 121, 21, 222, 122, 22, 223, 123, 23, 224, 124$;

$n_3^{(2)} = 236, 126, 16, 207, 197, 87, 288, 178, 68, 259, 149, 39, 230, 120, 10, 201, 91, 282, 172, 62, 265, 155, 45$;

$$\widehat{n}_3 = \bigcap_{i=1}^{2} n_3^{(i)} = 120.$$

При этом оценка надежности равна

$$P(\pi^*) \simeq (0{,}997)^3.$$

Значению параметра $\hat{n}_3 = 120$ соответствуют числа $N_1^* = 59$, $N_2^* = -81$, и система уравнений (9) принимает вид

$$\begin{cases} 3\psi_3 - 301\psi_1 = -3{,}07, \\ 52\psi_3 - 301\psi_2 = -4{,}05, \end{cases} \tag{10}$$

$$\pi^* \equiv \{\psi \mid \psi \in R_3, \quad -0{,}03 \leqslant \psi_i \leqslant 0{,}03, \quad i = 1,\ 2,\ 3\}. \tag{11}$$

Ясно, что система (10) в области (11) обладает множеством решений, а оценка параметра x принадлежит отрезку $[0{,}4 - 0{,}05/301,\ 0{,}4 + 0{,}01/301]$.

Так, например, точка $\psi = (0{,}01,\ 0{,}01 - 0{,}02)$ является решением системы (10), $\psi \in \pi^*$. При этом на основании (1)

$$x = (1 + 0{,}2)/3 = (21 - 0{,}2)/52 = (120 + 0{,}4)/301 = 0{,}4.$$

Замечание 3. Если погрешность по какой-либо шкале отсутствует, т. е. для некоторого i одна из $\psi_i = 0$, то система (9) в любом случае имеет единственное решение в области π^*. Это означает, что единственной оценке параметра n_m всегда соответствует единственная оценка определяемого параметра x.

Изложенный выше метод, как показывают формулы (4) — (7), обладает достаточной простотой для реализации его на ЭВМ. Кроме того, применение этого метода позволяет решать следующие задачи, представляющие самостоятельный интерес:

1. Нахождение таких допустимых границ изменения погрешности ψ, при которых оценка параметра n_m была бы однозначной, т. е. определение множества π^*.
2. Выявление тех шкал, по которым погрешности измерения фаз вносят наиболее существенный вклад в неоднозначность определяемого параметра. Решение этой задачи может быть получено путем варьирования области π^* по каждой переменной в отдельности.

В заключение автор выражает признательность доценту Ю. Д. Попову за полезные обсуждения этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— Автометрия, 1972, № 4.
2. **Скрыпник Г. И.** О рекуррентной процедуре раскрытия неоднозначности фазовых измерений.— Автометрия, 1978, № 3.
3. **Марчевский М. Н.** Теория чисел. Харьков: изд. Харьковского ун-та, 1958.

Поступило в редакцию 23 апреля 1979 г.