

Н. Д. ГОГИН
(Петрозаводск)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АДАМАРА И УВЕЛИЧЕНИЕ МАСШТАБА СИГНАЛА

Цель настоящей работы — вывод точной формулы, связывающей записанное в циклической нумерации [1] преобразование Адамара дискретной функции f с преобразованием Адамара ее «увеличения» в m раз [2].

На функцию f и число m накладываются следующие естественно возникающие ограничения:

- 1) m должно быть взаимно просто с числом $2^v - 1$;
- 2) $f(0) = 0$ и значения f сосредоточены на v последовательных числах из множества $\{1, 2, \dots, 2^v - 2\}$;
- 3) расширение в m раз должно быть допустимо для функции в том смысле, что множество, на котором сосредоточены значения расширенной функции, «умещается» в множестве $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, где $n = 2^v$.

Для простоты мы подробно рассматриваем лишь одномерный случай, записывая f в виде 2^v -строки. Переход к двумерному случаю не представляет принципиальной трудности. Оказывается, что в этих условиях спектр расширенной функции получается из спектра исходной функции умножением последнего на некоторую матрицу довольно простой структуры (см. формулу (7)), что может быть использовано, например, в задачах, связанных с распознаванием сигналов, поскольку установленная нами связь сохраняет всю информацию о спектре исходного сигнала.

Заметим, наконец, что в силу первого ограничения самыми удобными являются те значения v , для которых число $2^v - 1$ простое, например $v = 3, 5, 7, 13$. Такие числа известны как простые числа Мерсена [3].

В работе мы сохраняем те же обозначения, что и в [1]: $\mathcal{H}(f)$ — преобразование Адамара дискретной функции f , рассматриваемое как преобразование Фурье на аддитивной группе V конечного поля $GF(2^v)$ (или же на группе $W = V \oplus V$, если речь идет об изображениях). Далее на множестве V вводится билинейная форма

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \sum_{i=0}^{v-1} \varepsilon_i \eta_i,$$

где $v_1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{v-1})$, $v_2 = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{v-1}) \in V$, и если $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ — невырожденный линейный оператор, то через $\tilde{\mathcal{A}}$ обозначается его продолжение на кольцо функций $\mathcal{C}[V]: (\tilde{\mathcal{A}}(f))(v) = f(\mathcal{A}(v))$ (напомним, что $\tilde{\mathcal{A}}$ — перестановочный оператор на $\mathcal{C}[V]$). Как показано в [4], имеет место формула

$$\mathcal{H}\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = \tilde{\mathcal{A}}^* \mathcal{H}, \quad (1)$$

где \mathcal{A}^* — оператор, сопряженный с \mathcal{A} относительно указанной билинейной формы. Если теперь упорядочить элементы пространства V , начиная с 0, по степеням некоторой фиксированной образующей z мультипликативной группы $GF(2^v)^*$:

$$V = \{0, z^0 = 1, z^1, \dots, z^{2^v-2}\}, \quad (2)$$

то для всякой функции f , такой, что $f(0) = 0$, ее циклический сдвиг на l элементов вправо естественно моделируется умножением ее аргумента на элемент $a = z^{-l}$, а это, в свою очередь, задает линейный (и невырожденный) оператор на V . В итоге, если обозначить через P матрицу перехода от обычной нумерации компонент 2^v -вектора числами $0, 1, 2, \dots, 2^v - 1$ к той, которая дается формулой (2), и положить

$$\mathcal{G}(f) = (1_j | \bar{n}) f(PHP^T) \quad (3)$$

(здесь $H(2^v \times 2^v)$ — матрица Адамара), то все компоненты спектра $\mathcal{G}(f)$ функции f (за исключением компоненты $\mathcal{G}(f)_0$) при циклическом сдвиге f на l элементов сами сдвигаются циклически на $-l$ элементов [1].

Эти результаты лежат в основе настоящей работы, и всюду в дальнейшем все перечисленные выше соглашения предполагаются выполненными. Увеличение $f(v)$, $v = z^k$ в m раз выполняется в два этапа.

Сначала к f применяется оператор Q'_m «разрежения» в m раз:

$$(Q'_m(f))(z^k) = f(z^{k'})$$

для $k = mk'$. Если m и $n - 1$ взаимно просты, то Q'_m является корректно определенным (для допустимых f) и взаимно-однозначным оператором. Например, для

$$f = (0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 0)$$

получим

$$Q'_2(f) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 0).$$

Далее, пусть R — оператор циклического сдвига функции f на один элемент вправо. Ясно, что $(Rf)(z^k) = f(z^{k-1})$. Тогда оператор M_m увеличения f в m раз определяется нами как произведение

$$M_m = (R^0 + R^1 + R^2 + \dots + R^{m-1}) Q'_m. \quad (4)$$

В приведенном выше примере

$$M_2(f) = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 0).$$

Таким образом, описанная конструкция соответствует понятию гомотетии с центром в точке $z^0 = 1$ и коэффициентом m .

Для прямого использования результатов работы (1) мы должны рассмотреть вопрос о линейности (и обратимости) оператора M_m . Поскольку сумма $S_m = R^0 + R^1 + \dots + R^{m-1}$ есть линейный оператор на $C[V]$, вопрос сводится к оператору Q'_m . Ясно, что если $m = 2^l$, то Q'_m является просто автоморфизмом поля $GF(2^v)$, а потому заведомо линейным оператором на V [4].

При $m \neq 2^l$ это уже не так, однако эту трудность можно обойти, используя следующий факт: если m взаимно просто с $n - 1$, то существует единственный невырожденный оператор Q_m на V , такой, что $Q_m(z^k) = z^{km}$ для $k = r, r+1, \dots, r+v-1$ *. Предположим теперь, что наша исходная функция f сосредоточена на множестве $z^r, z^{r+1}, \dots, z^{r+v-1}$, и заменим в формуле (4) оператор Q'_m на Q_m^{-1} . Тогда мы получим оператор, действующий на f «точно так же», как и оператор M_m из формулы (4). Мы снова будем обозначать его M_m , и, таким образом,

$$M_m = (R^0 + R^1 + \dots + R^{m-1}) \tilde{Q}_m^{-1}, \quad (5)$$

где Q_m — линейный оператор на V .

Полагая теперь $f_1 = \tilde{Q}_m^{-1}(f)$, в соответствии с (1) получаем

$$\mathcal{Z}(f_1) = \mathcal{Z}(f) \tilde{Q}_m^*, \quad (6)$$

т. е. спектр «разреженной» (с помощью \tilde{Q}_m^{-1}) функции f_1 отличается от спектра исходной функции f лишь перестановкой его элементов, задаваемой матрицей \tilde{Q}_m^* .

Далее, используя (5) и те замечания о связи спектра $\mathcal{Z}(f)$ и сдвига, которые мы сделали в начале статьи, находим, что

$$\mathcal{Z}(M_m(f)) = \mathcal{Z}(f) \tilde{Q}_m^* S_m, \quad (7)$$

где

$$S_m = \sum_{l=0}^{m-1} \rho^l,$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

* Для доказательства достаточно заметить, что $\{z^r, z^{r+1}, \dots, z^{r+v-1}\}$ и $\{z^{mr}, z^{m(r+1)}, \dots, z^{m(r+v-1)}\}$ образуют базисы пространства V над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Легко показать, что в наших условиях матрица S_m обратима, так что формула (7) действительно устанавливает взаимно-однозначную и линейную связь между спектрами.

Если «центр гомотетии» находится в точке z^i , где $i \neq 0$, то, обозначая через R_i оператор циклического сдвига, переводящий z^i в $z^0=1$, положим $Q_{m,i} = R_i^{-1} Q_m R_i$. Тогда оператор $Q_{m,i}$ осуществляет m -кратное разрежение функции «относительно центра z^i », а $M_{m,i} = (R^0 + R^1 + \dots + R^{m-1}) \tilde{Q}_{m,i}^{-1}$ моделирует гомотетию с центром z^i и коэффициентом m . Формула (7) переходит в

$$\mathcal{G}(M_{m,i}(f)) = \mathcal{G}(f) \tilde{Q}_{m,i}^* S_m. \quad (8)$$

Здесь $\tilde{Q}_{m,i}^*$ — снова перестановочная матрица.

Для двумерного случая, когда f и $\mathcal{G}(f) = (PHPT)f(PHPT)/n$ являются $(n \times n)$ -матрицами, легко получить

$$\mathcal{G}(M_{(m_1, m_2)(i, j)}(f)) = S_{m_2} \tilde{Q}_{m_2}^* \mathcal{G}(f) \tilde{Q}_{m_1}^* S_{m_1}, \quad (9)$$

где (z^i, z^j) — центр гомотетии, а m_1 и m_2 — коэффициенты увеличения по горизонтали и вертикали соответственно.

Заметим (это следует из [1]), что в этом случае при перестановках $\tilde{Q}_{m_1}^*$ и $\tilde{Q}_{m_2}^*$ строчка и столбец с номером 0 матрицы $\mathcal{G}(f)$ переходят сами в себя, что очень помогает при использовании формулы (9) в конкретных задачах распознавания.

В заключение приведем небольшой пример. Пусть $n=8$, $m=3$ и $f=(0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$. Построив матрицу P по правилу, указанному в [1], убеждаемся, что преобразование $\mathcal{G}(f)$ сводится к умножению строки f на матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

строчки которой и представляют собой одномерные «маски» (в двумерном случае берутся их произведения). Имеем

$$\mathcal{G}(f) = (3, -3, -3, 1, -1, 1, 3, -1).$$

Далее,

$$f_1 = \tilde{Q}_3^{-1}(f) = (0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0)$$

и

$$\mathcal{G}(f_1) = (3, 1, -3, 1, 3, -3, -1, -1),$$

откуда видно, что $\mathcal{G}(f)$ и $\mathcal{G}(f_1)$ отличаются лишь перестановкой семи последних компонент.

Наконец, находим, что

$$M_3(f) = (0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 0)$$

и

$$\mathcal{G}(M_3(f)) = (9, -1, 1, 1, -1, -5, -1, -3).$$

Видно, что $\mathcal{G}(M_3(f))$ получается суммированием $\mathcal{G}(f_1)$ с двумя его последовательными циклическими сдвигами влево (первый элемент на месте!).

Таким образом, как и было показано выше,

$$\mathcal{G}(M_3(f)) = \mathcal{G}(f_1) S_3,$$

где

$$S_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ \dots & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогин Н. Д. Преобразование Адамара и сдвиг изображения.— *Автометрия*, 1979, № 2.
2. Нама Н., Yamashita K. Walsh-Hadamard Power Spectra Invariant to Certain Transform Groups.— *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1979, vol. 9, p. 227.
3. Хассе Г. Лекции по теории чисел. М.: ИЛ, 1953.
4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

Поступило в редакцию 25 декабря 1979 г.

УДК 621.317

В. В. ХЛЮБИСТОВ

(Киев)

К ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача в определении координат объекта для фазометрических систем заключается в том, чтобы получить однозначную оценку определяемого параметра (дальности или направляющего косинуса) по неоднозначной информации о дробных частях фазы в шкалах с различными масштабными коэффициентами [1, 2]. Способ многошкальных измерений, применяемый для устранения возникающей неоднозначности, с математической точки зрения описывается неполной системой линейных целочисленных уравнений

$$x = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = (k_2 + \varphi_2)/d_2 = \dots = (k_m + \varphi_m)/d_m. \quad (1)$$

Здесь $k_i = [d_i x]^+$, $\varphi_i = \{d_i x\}^+$, $[\cdot]^+$ — операция округления до ближайшего целого, $\{\cdot\}^+$ — дробная часть числа соответственно, d_i — масштабный коэффициент i -й шкалы, $0 < d_1 < \dots < d_m$, d_i — целые числа, m — число шкал, x — определяемый параметр (направляющий косинус), $x \in [0, 1]$.

Наблюдаемые значения дробных частей фазы

$$\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+,$$

где ψ_i — ошибка измерения по i -й шкале,

$$\psi_i \in [-\Delta_i, \Delta_i], \quad \Delta_i \in [0, 0, 5], \quad i = \overline{1, m}.$$

Для решения сформулированной выше задачи (однозначного определения целочисленного параметра k_m и соответственно x) в инженерной практике применяется метод последовательного пересчета. Однако для использования этого метода необходимо, чтобы масштабный коэффициент d_1 первой шкалы был меньше единицы. Формирование шкалы влечет за собой увеличение ошибки, которая, в свою очередь, уменьшает вероятность правильного устранения неоднозначности в определении параметра k_m . Это является основным недостатком метода последовательного пересчета.

В работе [1] предложен алфавитный метод, не требующий формирования шкал, но алгоритм его, по существу, сводится к простому перебору, что очевидным образом снижает его эффективность. В [2] при определенных предположениях строится рекуррентная процедура для алфавитного метода, которая, естественно, улучшает его алгоритмичность. В настоящей статье предлагается еще один метод раскрытия неоднозначности фазовых измерений, который так же, как и алфавитный, не требует формирования шкал и алгоритм которого, как будет показано ниже, обладает достаточно хорошими характеристиками.

Следуя [1], вместо системы уравнений (1), рассмотрим эквивалентную систему

$$(n_i + \hat{\varphi}_i - \psi_i)/d_i = (n_m + \hat{\varphi}_m - \psi_m)/d_m, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (2)$$

где $n_i = k_i + \delta k_i$, $\delta k_i = [\varphi_i + \psi_i]^+ = 0, \pm 1$.

Систему (2) перепишем в виде

$$n_i d_m - n_m d_i + (\hat{\varphi}_i - \psi_i) d_m - (\hat{\varphi}_m - \psi_m) d_i = 0, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (3)$$