УДК 517.587 : 53.072 : 681.3

А. П. ШЕР
(Владивосток)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ УОЛША

Функции Уолша в последние годы все чаще используются для анализа и синтеза логических схем, диагноза цифровых систем, классификации булевых функций, представления систем функций алгебры логики ортогональными рядами [1—5], в системах обработки информации оптическими методами [6—10]. Кроме собственно функций Уолша, применяются также их линейно-деформированные аналоги [2, 8—10]. При этом нередко известные свойства функций Уолша необоснованно переносятся на их линейные деформации.

В настоящей работе рассмотрены важные для приложений свойства систем линейно-деформированных функций Уолша (ЛДФУ), получены соотношения между разложениями функции по разным системам ЛДФУ, между функцией и ее двойным преобразованием по системе ЛДФУ и др.

I. Построение систем ЛДФУ. Пусть задана последовательность чисел $\{\eta_i^{(n)}\}_{i=0}^{2^n-1}$, где $\eta_i^{(n)} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n-1\}$. Числа $\eta_i^{(n)}$ внутри заданной последовательности не повторяются и упорядочены по i произвольным образом. Указанной последовательности однозначно соответствует система дискретных функций $\{\psi_{ij}\}$, таких, что если $j\,(j=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$ есть номер отсчета i-й функции $\{\psi_{ij}\}$, то при

$$l_k = \left(\eta_i^{(n)}\right)_k \wedge j_k$$

$\left(\left(\eta_i^{(n)}\right)_k,\ j_k \in \{0, 1\}\right.$ — содержимое k-го ($k=1, 2, \ldots, n$) разряда в двоичном представлении чисел $\eta_i^{(n)}$ и j соответственно; $\wedge$ означает поразрядную конъюнкцию) и

$$m = \sum_{k=1}^{n} l_k$$

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \xi, & m \equiv 0 \pmod 2; \\ z, & m \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\xi = \mathrm{const}$ и $z = \mathrm{const}$.

В частном случае при $\xi = 1$ и $z = 1$ условиями (1) определяется система функций Уолша [11, 12], которую ниже будем обозначать через $\{\varphi_{ij}\}$.

Легко показать, что все функции $\{\psi_{ij}\}$ из (1) можно получить линейным преобразованием функций Уолша $\{\varphi_{ij}\}$

$$\psi_{ij} = (\varphi_{ij} + a)\, b, \qquad (2)$$

в котором

$$a = (\xi + z)/(\xi - z),$$
$$b = (\xi - z)/2,$$
$$\xi \neq z.$$

II. Соотношения между функциями $\{\psi_{ij}\}$. *Утверждение 1.* Пусть система функций $\{\psi_{ij}\}$ определена условиями (1). Тогда если $\psi_{0j} \equiv \xi$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$, то

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi_{ij}\psi_{kj} = \begin{cases} \xi^2 2^n, & i = k = 0; \\ (\xi^2 + z^2)\, 2^{n-1}, & i \neq 0,\ i = k; \\ \xi(\xi + z)\, 2^{n-1}, & i = 0,\ i \neq k; \\ (\xi + z)^2\, 2^{n-2}, & i \neq 0,\ k \neq 0,\ i \neq k. \end{cases} \qquad (3)$$

Замечание. Более общим (с учетом изложенной в разделе I вычислительной процедуры) было бы записать выражение (3) при несколько измененных условиях:

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi_{ij}\psi_{kj} = \begin{cases} \xi^2 2^n, & \eta_i^{(n)} = \eta_k^{(n)} = 0; \\ (\xi^2 + z^2)\, 2^{n-1}, & \eta_i^{(n)} \neq 0,\quad \eta_i^{(n)} = \eta_k^{(n)}; \\ \xi(\xi + z)\, 2^{n-1}, & \eta_i^{(n)} = 0,\quad \eta_i^{(n)} \neq \eta_k^{(n)}; \\ (\xi + z)^2\, 2^{n-2}, & \eta_i^{(n)} \neq 0,\quad \eta_k^{(n)} \neq 0,\quad \eta_i^{(n)} \neq \eta_k^{(n)}, \end{cases} \qquad (3а)$$

которые верны при любом упорядочении функций $\{\psi_{ij}\}$ (т. е. без дополнительного ограничения $\psi_{0j}\equiv\xi$, $j=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$). Но так как в приложениях, как правило, используется упорядоченность функций, при которой константная функция предшествует всем остальным, то принято более простое выражение (3). Указанное ограничение далее сохраняется.

Для доказательства (3) из (2) получим

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi_{ij}\psi_{kj} = b^2 \sum_{j=0}^{2^n-1} (\varphi_{ij}+a)(\varphi_{kj}+a) = b^2 \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{ij}\varphi_{kj} + \right.$$

$$\left. + a \sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{ij} + a \sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{kj} + a^2 2^n \right). \tag{4}$$

Известно, что соотношение между функциями $\{\varphi_{ij}\}$ (являющееся для них соотношением ортогональности) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{ij}\varphi_{kj} = \begin{cases} 2^n, & i=k; \\ 0, & i\neq k. \end{cases} \tag{5}$$

Кроме того,

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{ij} = \sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{kj} = \begin{cases} 2^n, & i=k=0; \\ 0, & i\neq 0,\ k\neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (4) с учетом (2), убеждаемся в справедливости (3).

Из (3) следует, что соотношение ортогональности системы

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi_{ij}\psi_{kj} = \begin{cases} P\neq 0, & i=k; \\ 0, & i\neq k, \end{cases}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\xi=-z$, кроме $\xi=0$.

Система $\{\psi_{ij}\}$: $\psi_{ij}\in\{\xi=1,\ z=0\}$ является примером неортогональной системы функций. Для нее согласно (3)

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \psi_{ij}\psi_{kj} = \begin{cases} 2^n, & i=k=0; \\ 2^{n-1}, & i\neq 0,\ i=k; \\ 2^{n-1}, & i=0,\ i\neq k; \\ 2^{n-2}, & i\neq 0,\ k\neq 0,\ i\neq k. \end{cases} \tag{7}$$

Генерация таких функций легко реализуется средствами некогерентной оптики [8—10]. Используемые в ней транспаранты являются носителями неотрицательных функций, например, 1 — прозрачен, 0 — непрозрачен. Но такие функции класса ЛДФУ (согласно (3) и (7)) не ортогональны. Вместе с тем ортогональные функции класса ЛДФУ обязательно знакопеременные, так что они не могут быть реализованы некогерентными методами. Наконец, не всякие функции, полученные линейным преобразованием функций Уолша, составляют полную систему (см. раздел IV).

III. Соотношения между разложениями в ряд по системам $\{\psi_{ij}\}$. *Утверждение 2.* Пусть $\{f_j\}_{j=0}^{2^n-1}$ — заданная дискретная функция. Тогда если

$$F_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j^{(1)}\psi_{ij}^{(1)}, \tag{8}$$

$$F_i^{(2)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j^{(2)}\psi_{ij}^{(2)}, \tag{9}$$

где системы $\{\psi_{ij}^{(1)}\}$ и $\{\psi_{ij}^{(2)}\}$ определены условиями (1), в которых

$$\psi_{ij}^{(1)}\in\{\xi_1, z_1\},\quad \psi_{ij}^{(2)}\in\{\xi_2, z_2\},$$
$$\xi_1\neq 0,\quad \xi_2\neq 0, \tag{10}$$

а также

$$f_j^{(1)} = (f_j+c_1)\,d_1,\quad j=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1,$$
$$f_j^{(2)} = (f_j+c_2)\,d_2,\quad j=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1, \tag{11}$$

то

$$F_i^{(1)} = \begin{cases} \xi_1 d_1 \left[F_0^2/\xi_2 d_2 + (c_1 - c_2)\, 2^n\right], & i = 0; \\ \dfrac{(\xi_1 - z_1)\, d_1}{2\,(\xi_2 - z_2)\, d_2} \left[2F_i^{(2)} - \dfrac{\xi_2 + z_2}{\xi_2} F_0^{(2)}\right] + \dfrac{\xi_1 + z_1}{2\xi_1} F_0^{(1)}, & i > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Из (8) с учетом (2) и (10) имеем

$$F_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j^{(1)} \psi_{ij}^{(1)} = b_1 d_1 \sum_{j=0}^{2^n-1} (f_j + c_1)(\varphi_{ij} + a_1) = b_1 d_1 \left[\sum_{j=0}^{2^n-1} f_j \varphi_{ij} + \right.$$

$$\left. + a_1 \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j + c_1 \sum_{j=0}^{2^n-1} \varphi_{ij} + a_1 c_1 2^n \right]. \tag{13}$$

Обозначив

$$F_i = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j \varphi_{ij}, \tag{14}$$

после подстановки (14) и (6) в (13) и с учетом (2)

$$F_i = \begin{cases} \dfrac{F_0^{(1)}}{\xi_1 d_1} - c_1 2^n, & i = 0; \\ \dfrac{1}{(\xi_1 - z_1)\, d_1} \left[2F_i^{(1)} - \dfrac{\xi_1 + z_1}{\xi_1} F_0^{(1)}\right], & i > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что переход (15) от разложения $F_i^{(1)}$ по системе $\{\psi_{ij}^n\}$ к разложению F_i по системе функций Уолша $\{\varphi_{ij}\}$ невозможен при $\xi_1 = 0$.

Получив соотношение, аналогичное (15), исходя из (9) и (11) и приравняв его правую часть к правой части (15), придем к соотношению (12).

В частности, согласно (15) соотношение между разложениями по системам $\{\psi_{ij}^{(1)}\} : \psi_{ij}^{(1)} \in \{\xi_1 = 1, z_1 = 0\}$ и $\{\varphi_{ij}\}$ функций Уолша для заданной функции $\{f_j\}_{j=0}^{2n-1}$ имеет вид

$$F_i = \begin{cases} F_0^{(1)}, & i = 0; \\ 2F_i^{(1)} - F_0^{(1)}, & i > 0. \end{cases}$$

IV. Соотношение между функцией и ее двойным преобразованием по системе $\{\psi_{ij}\}$. *Утверждение 3.* Пусть $\{f_j\}_{j=0}^{2^n-1}$ — заданная дискретная функция. Тогда если

$$f_j^* = \sum_{i=0}^{2^n-1} \psi_{ij} \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j \psi_{ij} \tag{16}$$

(система $\{\psi_{ij}\}$ определена условиями (1), в которых $\xi \neq 0$), то

$$f_j = \begin{cases} \dfrac{f_0^*}{\xi\,(\xi - z)\, 2^{n-1}} - \dfrac{\xi + z}{\xi - z} F_0, & j = 0; \\ \dfrac{1}{(\xi - z)^2\, 2^{n-2}} \left[f_j^* - \dfrac{\xi + z}{2\xi} f_0^*\right], & j > 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $F_0 = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j$.

Доказательство. Из условия (16) с учетом (2)

$$f_j^* = \sum_{i=0}^{2^n-1} \psi_{ij} \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j \psi_{ij} = b^2 \sum_{i=0}^{2^n-1} (\varphi_{ij} + a) \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j (\varphi_{ij} + a) =$$

$$= b^2 \sum_{i=0}^{2^n-1} (\varphi_{ij} + a) \left[\sum_{j=0}^{2^n-1} f_i \varphi_{ij} + a \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j\right].$$

Так как $\sum_{j=0}^{2^n-1} f_i = F_0$, то

$$f_j^* = b^2\left[\sum_{i=0}^{2^n-1}(\varphi_{ij}+a)\sum_{j=0}^{2^n-1}f_j\varphi_{ij}+a\sum_{i=0}^{2^n-1}(\varphi_{ij}+a)F_0\right] = b^2\left[\sum_{i=0}^{2^n-1}\varphi_{ij}\sum_{j=0}^{2^n-1}f_j\varphi_{ij}+\right.$$

$$\left.+a\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1}f_j\varphi_{ij}+aF_0\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}\varphi_{ij}+a2^n\right)\right]. \tag{18}$$

Первое и второе слагаемые в квадратных скобках выражения (18) равны

$$2^n f_j \tag{19}$$

и

$$a2^n f_0 \tag{20}$$

соответственно. Учитывая (6), третье слагаемое в (18) приводится к виду

$$\begin{cases} a2^nF_0(a+1), & j=0; \\ a^2 2^n F_0, & j>0. \end{cases} \tag{21}$$

Подставив (19), (20), (21) в (18), с учетом (2) приходим к требуемому соотношению (17).

В частности, при $\xi=1$, $z=-1$ из (17) получаем известное для функций Уолша соотношение между функцией и ее двойным преобразованием Фурье

$$f_j = 2^{-n} f_j^*, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1.$$

Заметим, что (17) имеет смысл при $\xi\neq 0$. В противном случае справедливо

Утверждение 4. Разложение в ряд функции $\{f_j\}_{j=0}^{2^n-1}$ по системе $\{\psi_{ij}\}$: $\psi_{ij}\in \in\{\xi=0, z\neq 0\}$ единаково для всех $\{f_j\}$, различающихся только значениями f_0.

В самом деле, в данной системе $\{\psi_{ij}\}$ все $\psi_{i0}\equiv 0$, $i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$. Следовательно, каким бы ни было f_0, в сумму

$$F_i = \sum_{j=0} f_j \psi_{ij}$$

оно войдет как $f_0\psi_{i0}\equiv 0$. Так что изменение f_0 не меняет коэффициента F_0. Это и доказывает утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карповский М. Г., Москалев Э. С.** Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. Л.: Энергия, 1973.
2. **Edwards C. R.** The Application of the Rademacher-Walsh Transform to Boolean Function Classification and Threshold Logic Synthesis.— IEEE Trans. Computers, 1975, vol. C-24, N 1.
3. **Dertouzos M. L.** Threshold Logic: a Synthesis Approach. Mass. Inst. Techn. Cambridge. Res. Monograph 32. M. J. T. Press, 1965.
4. **Schulz J.** Anwendung der Walsh-Funktionen zur Elektronischen Funktionsprufung Digitaler Systeme.— Nachrichtentechn. Elektron., 1976, Bd 26, N 12.
5. **Laski J.** The Analysis and Synthesis of Probability Transformers.— J. Eng. Math., 1973, vol. 7, N 4.
6. **Потатуркин И. О., Твердохлеб П. Е.** Синтез изображений когерентно-оптическими методами.— Автометрия, 1974, № 1.
7. **Чугуй Ю. В.** Анализ спектров сигналов с многодорожечной силуэтной записью.— Автометрия, 1974, № 6.
8. **Кривенков Б. Е., Твердохлеб П. Е., Чугуй Ю. В.** Оптический метод кодирования изображений при помощи преобразования Адамара.— Автометрия, 1974, № 6.
9. **Кривенков Б. Е., Михляев С. В., Твердохлеб П. Е., Чугуй Ю. В.** Некогерентная оптическая система для выполнения матричных преобразований.— Автометрия, 1975, № 3.
10. **Блок А. С., Зюзин О. М., Крупицкий Э. И., Фридман Г. Х.** Гибридные оптико-электронные системы распознавания изображений.— Автометрия, 1974, № 1.
11. **Шер А. П.** Вычисление функций Уолша с помощью специальных рядов целых неотрицательных чисел.— В кн.: Логические методы диагноза. Владивосток, 1975, с. 128—132.
12. **Шер А. П.** Построение систем функций Уолша.— В кн.: Равномерные приближения и проблема моментов. Владивосток, 1977, с. 136—146.

Поступило в редакцию
25 июня 1979 г.