АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1980

СИСТЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 681.3.06 : 519

Ю. М. КРЕНДЕЛЬ, А. Л. РЕЗНИК
(Новосибирск)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА СИСТЕМ СВЯЗИ

При разработке и проектировании коммуникационных узлов связи в сетях передачи данных, а также в телефонных и вычислительных сетях возникает задача, которую можно в общем виде сформулировать следующим образом. Имеется некоторое число абонентов, каждый из которых может потребовать установления связи с любым другим. Связь устанавливается, если затребованный абонент свободен; в противном случае абонент, подавший требование на связь, ставится в очередь. Предполагается, что существуют ограничения на длины очередей, поэтому в общем случае требование на связь может быть потеряно. Абонент считается занятым, если он находится в связи с некоторым другим абонентом или ожидает в очереди. Занятые абоненты требований на связь не подают.

Здесь заслуживают внимания такие характеристики, как распределение числа одновременно установленных связей и числа ожидающих в очереди, распределение времени ожидания абонентом предоставления ему требуемой связи и в случае ограничений на длину очереди также вероятность потери требования.

В данной статье рассматривается частный случай изложенной задачи, когда все абоненты «симметричны» в смысле характера подачи ими требований на связь, обслуживания связей между абонентами, а также организации и длины очередей к каждому из абонентов. Исследование проводится как для случая отсутствия ограничений на длины очередей, так и для случая, когда очереди запрещены.

1. **Отсутствие ограничений на длину очереди.** Имеется N абонентов, каждый из которых может подать заявку на разговор с любым (но только с одним) из $(N-1)$ других абонентов. Если i-й $(i=1, 2, \ldots, N)$ абонент подал заявку на разговор с j-м $(j=1, 2, \ldots, N;\ j\neq i)$, то разговор между i-м и j-м абонентами начинается немедленно, если j-й абонент свободен; в противном случае i-й абонент ставится в очередь к j-му и ожидает удовлетворения своей заявки в порядке справедливой дисциплины. Если абонент подал заявку, то вероятность того, что это есть заявка на разговор с конкретным абонентом, равна $1/(N-1)$. Длина очереди к каждому из абонентов не ограничена (для чего достаточно число мест в очереди принять равным $N-2$). Длительность сеанса связи («разговора») между двумя любыми абонентами подчиняется показательному распределению с параметром μ. Вероятность того, что любой абонент, свободный в начале некоторого промежутка времени τ, не подаст в течение этого промежутка заявку на разговор ни с одним из абонентов, равна $\exp(-\lambda\tau)$, $\lambda>0$.

В данной системе определяются параметры распределения чисел одновременно ведущихся разговоров и занятых абонентов.

Состояние системы в произвольный момент времени t будем характеризовать вектором $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m)$, $m = [N/2]$, где α_k — число занятых в момент времени t абонентов, «принадлежащих k-му разговору» (в число таких абонентов входят абоненты, ведущие k-й разговор, и абоненты, стоящие в очереди к любому из абонентов, принадлежащих k-му разговору), и $N \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m \geqslant 0$ (т. е. разговоры упорядочены по числу принадлежащих им абонентов).

Введенный указанным выше способом случайный процесс является марковским с матрицей переходных вероятностей, определяемой из соотношений

$$P\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)_{t+\Delta t}/(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)_t\} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \lambda\gamma(\boldsymbol{\beta})\Delta t - \mu\omega(\boldsymbol{\beta})\Delta t, & \text{если } \alpha_k = \beta_k \quad (k = \overline{1, m}); \quad (1) \\ \dfrac{\lambda\beta_i\gamma(\boldsymbol{\beta})\,\xi_i(\boldsymbol{\beta})\,\Delta t}{N-1}, & \text{если } \alpha_k = \beta_k \quad (k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \\ & \alpha_i = \beta_i + 1, \quad 2 \leqslant \beta_i \leqslant N-1; \quad (2) \\ \dfrac{\lambda(\gamma(\boldsymbol{\beta}) - 1)\,\gamma(\boldsymbol{\beta})\,\Delta t}{N-1}, & \text{если } \alpha_k = \beta_k \quad (k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \\ & \alpha_i = 2, \quad \beta_i = 0; \quad (3) \\ \dfrac{\mu\xi_i(\boldsymbol{\beta})\,(2 - \delta(q, \beta_i - q))\,\Delta t}{\beta_i - 1}, & \text{если совокупность ненулевых координат вектора } (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \text{ совпадает с совокупностью ненулевых компонент набора} \\ & \{\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m, q, \beta_i - q\}, \\ & \beta_i \geqslant 4, \quad 2 \leqslant q \leqslant [\beta_i/2]; \quad (4) \\ \dfrac{2\mu\xi_i(\boldsymbol{\beta})\,\Delta t}{\beta_i - 1}, & \text{если } \alpha_k = \beta_k \quad (k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \\ & \alpha_i = \beta_i - 1, \quad \beta_i \geqslant 3; \quad (5) \\ \mu\xi_i(\boldsymbol{\beta})\,\Delta t, & \text{если } \alpha_k = \beta_k \quad (k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \\ & \alpha_i = 0, \quad \beta_i = 2; \quad (6) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ — символ Кронекера; $\gamma(\boldsymbol{\beta}) = N - \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k$ — число свободных абонентов; $\omega(\boldsymbol{\beta}) = m - \sum\limits_{k=1}^{m} \delta(\beta_k, 0)$ — число ведущихся разговоров; $\xi_i(\boldsymbol{\beta}) = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta(\beta_i, \beta_k)$ — кратность, с которой компонента, численно равная β_i, встречается в векторе $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Ниже поясняется вывод элементов (1)—(6) матрицы переходных вероятностей.

Переходная вероятность (1), т. е. вероятность того, что за бесконечно малый интервал времени Δt система останется в прежнем состоянии, равна

$$\exp(-\lambda\gamma(\boldsymbol{\beta})\Delta t)\exp(-\mu\omega\Delta t) = 1 - \lambda\gamma(\boldsymbol{\beta})\Delta t - \mu\omega(\boldsymbol{\beta})\Delta t + 0(\Delta t).$$

Переходная вероятность (2), т. е. вероятность того, что за время Δt ни один из ведущихся $\omega(\boldsymbol{\beta})$ разговоров не будет закончен, а один из свободных абонентов подаст заявку на связь с одним из абонентов, принадлежащих i-му разговору, равна

$$\exp(-\mu\omega(\boldsymbol{\beta})\Delta t)\exp(-\lambda(\gamma(\boldsymbol{\beta}) - 1)\Delta t)(1 - \exp(-\lambda\Delta t)) \times$$
$$\times \binom{\gamma(\boldsymbol{\beta})}{1} \frac{\beta_i}{N-1} + 0(\Delta t) = \frac{\lambda\beta_i\gamma(\boldsymbol{\beta})\,\Delta t}{N-1} + 0(\Delta t).$$

Переходная вероятность (3), т. е. вероятность того, что за время Δt ни один из ведущихся разговоров не будет закончен, а один из свободных абонентов подаст заявку на связь с другим свободным абонентом, равна

$$\exp(-\mu\omega(\boldsymbol{\beta})\Delta t)\exp(-\lambda(\gamma(\boldsymbol{\beta})-1)\Delta t)(1-\exp(-\lambda\Delta t))\times$$
$$\times\binom{\gamma(\boldsymbol{\beta})}{1}\frac{\gamma(\boldsymbol{\beta})-1}{N-1}=\frac{\lambda(\gamma(\boldsymbol{\beta})-1)\gamma(\boldsymbol{\beta})\Delta t}{N-1}+0(\Delta t).$$

Переходная вероятность (4) есть вероятность того, что в течение промежутка Δt закончится i-й разговор, причем окончание этого разговора немедленно приведет к организации двух новых (частные случаи, когда окончание некоторого разговора приводит к созданию лишь одного нового или же новый разговор вообще не образуется, описываются переходными вероятностями (5) и (6) соответственно). Для вычисления переходной вероятности (4) воспользуемся следующим приемом. Каждого из β_i абонентов отнесем к одной из двух подгрупп — левой или правой — в зависимости от того, в очереди к какому из ведущих i-й разговор абонентов он находится. Тогда группа из β_i абонентов может быть сформирована (β_i-1) различными способами: $(j,\ \beta_i-j)$, $j=1,\ \ldots,$ β_i-1. Докажем по индукции, что все эти способы формирования равновероятны, т. е. вероятность каждого из них равна $1/(\beta_i-1)$.

Итак, пусть $P(j,\ n-j)$ означает вероятность того, что группа из n абонентов, принадлежащих одному разговору, состоит из j левых и $n-j$ правых $(j=1,\ \ldots,\ n-1)$ абонентов. Отметим сразу (это потребуется в дальнейшем), что $P(n,\ 0)=P(0,\ n)=0$ для любого $n\geqslant 2$. Допустим теперь, что для некоторого n и произвольного $j=1,\ \ldots,\ n-1$ $P(j,\ n-j)=1/(n-1)$. Для $n=2$ справедливость допущения очевидна.

Тогда группа из $(n+1)$ абонентов, состоящая из j левых и $(n+1-j)$ правых, могла возникнуть двумя способами: либо последний абонент добавился к $(j-1)$ левым, либо к $(n-j)$ правым. Учитывая, что все абоненты могут быть вызваны с равной вероятностью,

$$P(j,\ \ n+1-j)=P(j-1,\ \ n+1-j)(j-1)/n+P(j,\ \ n-j)(n-j)/n.$$

Так как по допущению индукции

$$P(j-1,\ n+1-j)=P(j,\ n-j)=1/(n-1),$$

то $P(j,\ n+1-j)=1/n$ для любого $j=1,\ \ldots,\ n$.

Тем самым справедливость индукционного предположения доказана для произвольного n. В формуле переходной вероятности (4) некоторого пояснения требует сомножитель $(2-\delta(q,\ \beta_i-q))$: поскольку в группе из β_i абонентов подгруппы (q левых, β_i-q правых) и (β_i-q левых, q правых) не различаются, то соответствующая вероятность должна быть удвоена, за исключением случая, когда $q=\beta_i-q$.

Переходная вероятность (5) является, как уже отмечалось, частным случаем переходной вероятности (4) с той лишь разницей, что i-й разговор, который оканчивается в течение интервала Δt, имеет либо единственного левого, либо единственного правого абонента. В этом случае вместо одного закончившегося образуется один новый разговор.

Переходная вероятность (6) есть вероятность прекращения разговора между двумя абонентами системы, ни к одному из которых не имелось очереди. В этом случае нового разговора, естественно, не образуется.

Поскольку вероятности перехода не зависят от t, то введенный марковский процесс с конечным числом состояний является однородным и для него существуют предельные вероятности $\pi(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m)=\lim\limits_{t\to\infty}\times$

$\times P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)_t$, являющиеся решением системы уравнений [1]:

$$\begin{cases}\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum\limits_{(\beta_1, \dots, \beta_m)} \pi(\beta_1, \dots, \beta_m) P\{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)/(\beta_1, \dots, \beta_m)\}, \\ \sum\limits_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Переходные вероятности в (7) определяются из (1)—(6). Задача оценки размерности системы (7) может быть сформулирована в терминах размещения шаров по урнам [2]: $n (n \leqslant N)$ неразличимых шаров распределяется по $[N/2]$ урнам. Два возможных размещения считаются неразличимыми, если одно из них может быть получено из другого перестановкой урн. Требуется определить $\sum(N) = \sum\limits_{n=0}^{N} s\left(n, \left[\frac{N}{2}\right]\right)$, где $s(n, [N/2])$ — число различимых размещений n шаров по $[N/2]$ урнам, причем любая из урн может содержать 0, 2, 3, ..., n шаров, но запрещено размещать в урне один шар.

Для проведения оценки сложности системы линейных алгебраических уравнений (7) (т. е. оценки числа различных состояний введенного марковского процесса) использовалось соотношение

$$\sum(N) = 1 + \sum_{n=2}^{N} \left\{ \left[\frac{n}{2}\right] + \sum_{r=3}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\sum_{\nu_1=2}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{\left[\frac{n-\nu_1}{r-1}\right]} \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots \sum_{\nu_i=\nu_{i-1}}^{\left[\frac{n-\nu_1-\dots-\nu_{i-1}}{r-(i-1)}\right]} \cdots \sum_{\nu_{r-1}=\nu_{r-2}}^{\left[\frac{n-\nu_1-\dots-\nu_{r-2}}{2}\right]} \right) \right\}, \qquad (8)$$

которое представляет собой готовый алгоритм для реализации на ЭВМ.

Расчеты, проведенные на ЭВМ по формуле (8), показали, что число состояний системы растет очень быстро, так что для $N = 10$, например, приходится решать систему из 42 уравнений, для $N = 20$ размерность системы возрастает до 627, а для $N = 30$ пришлось бы решать систему из 5604 уравнений. Поэтому расчеты на ЭВМ АСВТ М-4030 приводились для систем с ограниченным числом абонентов ($N < 15$), а характеристики систем, для которых $N \geqslant 15$, определялись с помощью экстраполяции полученных результатов.

Так как пропорциональное увеличение значений λ и μ не влияет на окончательное решение системы (7), то исходными данными для программы, рассчитывающей вероятности $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, являлись N и μ/λ.

После ввода данных проводится расчет матрицы $IA(i, j)$, каждая строка которой характеризует одно из возможных состояний системы. Структура i-й строки показана на рис. 1. Здесь NRC_i — общее количество занятых в данном конкретном состоянии абонентов (разговаривающих и стоящих в очереди); KRC_i — количество ведущихся в этом состоянии разговоров; η_j^i — число групп абонентов, относящихся к одному разговору, каждая из которых содержит ровно j абонентов.

Некоторая избыточность информации (ячейки NRC_i и KRC_i) введена для увеличения скорости счета. С этой же целью строки матрицы

	0	1	2	3	...	N
IA(i...)	NRC_i	KRC_i	η_2^i	η_3^i	...	η_N^i

Рис. 1.

IA упорядочены по возрастанию NRC_i, а внутри строк с одинаковым значением NRC_i — по возрастанию KRC_i.

Далее составляется матрица-указатель IND (NRC, KRC), элементами которой являются минимальные номера строк i, для которых $IA(i, 0) = NRC$, $IA(i, 1) = KRC$ (таких строк насчитывается, вообще говоря, несколько, но все они расположены последовательно, начиная с i-й строки).

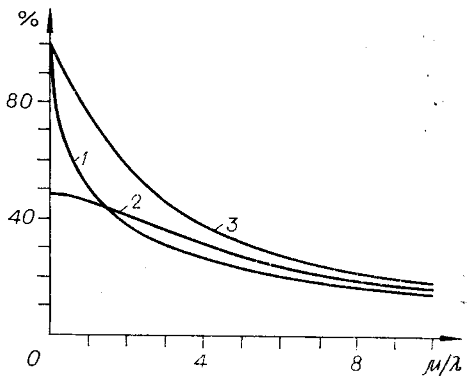

Рис. 2.

Построение матрицы инфинитезимальных коэффициентов (7) целесообразнее (в смысле эффективности результирующей программы) проводить не по строкам (и тем более не прямым перебором, как это формально записано в (1)—(6)), а по столбцам, для чего выполняется программная имитация перехода каждой строки матрицы $IA(i, j)$ во все смежные состояния. При этом, возможно, изменятся текущие значения NRC_i, KRC_i, а также значения некоторых из $\eta^i_j (j = 2, 3, \ldots, N)$. Сам же инфинитезимальный коэффициент считается по одному из правил (1)—(6). Существенное сокращение времени счета при организованной таким образом вычислительной процедуре обеспечивается тем, что номер строки, соответствующий некоторому смежному состоянию, в которое может перейти текущая строка, находится тривиально с использованием матрицы-указателя.

Завершается расчет стационарных вероятностей $\pi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ решением системы линейных уравнений (7). Кроме вычисления предельных вероятностей $\pi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, проводился программный расчет относительной загруженности системы (т. е. отношения среднего числа разговоров $\bar{\omega}$ к максимально возможному $[N/2]$), а также расчет относительного числа занятых абонентов (т. е. отношения среднего числа занятых абонентов $(N - \bar{\gamma})$ к N). Результаты расчетов показали, что эти параметры как функции от μ/λ практически не зависят от N. Обе зависимости представлены на рис. 2 (кривые *2* и *3* соответственно).

2. **Запрещение очередей.** Состояние системы в этом случае в отличие от ситуации, описанной в п. 1, полностью определяется числом ведущихся разговоров ω. Обозначим через $P_t(\omega)$ вероятность пребывания системы в состоянии ω в момент времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$P_{t+\Delta t}(\omega) = \frac{(N-2(\omega-1))(N-2(\omega-1)-1)\lambda}{N-1} P_t(\omega-1)\Delta t +$$
$$+ P_t(\omega)\left(1 - \lambda(N-2\omega)\frac{N-2\omega-1}{N-1}\Delta t - \mu\omega\Delta t\right) + P_t(\omega+1)\mu(\omega+1)\Delta t + 0(\Delta t),$$
$$\omega = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right], \qquad P_t(-1) = P_t\left(\left[\frac{N}{2}\right]+1\right) = 0.$$

Для вычисления стационарных вероятностей $\pi(\omega) = \lim_{t\to\infty} P_t(\omega)$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \pi(\omega-1)\dfrac{(N-2(\omega-1))(N-2(\omega-1)-1)\lambda}{N-1} - \pi(\omega)\left(\lambda(N-2\omega)\dfrac{N-2\omega-1}{N-1} + \right. \\ \qquad \left. + \mu\omega\right) + \pi(\omega+1)\mu(\omega+1) = 0 \qquad \left(\omega = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{N}{2}\right]\right), \\ \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \pi(k) = 1. \end{cases} \tag{9}$$

В отличие от системы уравнений (7) матрица системы уравнений (9) является трехдиагональной, поэтому вычисления на ЭВМ стационарных вероятностей $\pi(\omega)$ могут проводиться для достаточно больших N. Здесь были проделаны вычисления до $N=1000$. Так же, как и для системы без ограничений на длины очередей, стационарные вероятности $\pi(\omega)$ не изменяются при пропорциональном увеличении параметров μ и λ. Относительная загруженность системы (это, как уже сообщалось, есть отношение среднего числа ведущихся в стационарном режиме разговоров к $[N/2]$ — максимально возможному их числу) то практически не зависит от N. График этой зависимости в виде функции от μ/λ представлен на рис. 2 (кривая *1*).

Сравнение двух рассмотренных систем показывает, что эффективность работы (число разговоров, обслуживаемых в единицу времени) системы, в которой очереди запрещены, при одинаковых значениях N и μ/λ выше эффективности работы системы с очередями при $\mu/\lambda \leqslant 1,3$, т. е. когда разговоры достаточно продолжительны (если интенсивность λ считать фиксированной). При больших значениях μ/λ ($\mu/\lambda \to \infty$) эффективность работы обеих систем, естественно, падает до нуля, а при умеренных значениях отношения μ/λ несколько эффективнее системы с очередями. Таким образом, системы с очередями при определенном соотношении параметров μ и λ обладают большей эффективностью по сравнению с системами, в которых очереди запрещены. Заметим, что система, рассмотренная в п. 2, может быть предложена в качестве модели функционирования обычной телефонной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сарымсаков Т. А.** Основы теории процессов Маркова. М., Гостехиздат, 1954.
2. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М., Мир, 1967.

Поступила в редакцию 22 октября 1979 г.

УДК 519.283-681.32

В. А. ВИТТИХ, А. А. СИДОРОВ

(Куйбышев)

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВРЕМЕННЫХ ЗАДЕРЖЕК, ВНОСИМЫХ ОПЕРАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ, НА ТОЧНОСТЬ РЕГИСТРАЦИИ ИНФОРМАЦИИ В ИВК

Постановка задачи. Одним из распространенных режимов работы ИВК является программно-управляемый опрос аналоговых сигналов по нескольким каналам. В этом режиме регистрация информации в каждом из каналов осуществляется в моменты

$$t_i^k = t_i^0 + k\Delta t_i, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $i = \overline{1, N}$ — номер канала; t_i^0 — время первого запуска программы, обслуживающей i-й канал; Δt_i — интервал повторения этой программы. Планирование времени начала выполнения программ каналов t_i^k в ИВК осуществляется супервизором задач (планировщиком), входящим в состав любой операционной системы реального времени (ОСРВ). Супервизор