УДК 535.4 : 519.46

М. Л. АГРАНОВСКИЙ

(Новосибирск)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В СВЯЗИ С ОБРАБОТКОЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1. Пусть освещенный объект или источник сканируется круговым окном переменного радиуса и в каждый момент времени фиксируется средняя интенсивность части объекта, попадающей в поле зрения регистрирующего аппарата. Полученную информацию можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\pi r^2(\boldsymbol{u})}\int \operatorname{rect}\left(\left|\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}{r(\boldsymbol{u})}\right|\right) f(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} = I(\boldsymbol{u}), \tag{1}$$

где $f(\boldsymbol{v})$ — распределение интенсивности света в плоскости $\boldsymbol{v}=(x, y)$ объекта, $r(\boldsymbol{u})$ — радиус сканирующего окна с центром в точке $\boldsymbol{u}$, $|\boldsymbol{w}|$ — длина вектора $\boldsymbol{w}$,

$$\operatorname{rect}(|\boldsymbol{w}|) = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{w}| \leqslant 1, \\ 0, & |\boldsymbol{w}| > 1. \end{cases}$$

Задача состоит в определении функции интенсивности по известным измерениям $I(\boldsymbol{u})$.

Следует отметить, что к уравнению типа (1) приводят также задачи устранения расфокусировки изображения неплоского объекта при малой глубине резкости объектива и устранения на изображении искажений, вызванных сферической аберрацией.

2. Наиболее простым является случай, когда f задана на всей плоскости и функция $r(\boldsymbol{u})$ постоянна. Тогда левая часть уравнения (1) представляет собой обычную свертку и уравнение может быть решено, например, применением двумерного преобразования Фурье.

В настоящей работе рассмотрен еще один случай — $r(\boldsymbol{u}) \neq \mathrm{const}$, допускающий, как будет показано, аналитическое решение.

Пусть функция f задана в круге D_R радиусом R с центром в начале координат плоскости (x, y) и функция $r(\boldsymbol{u})$ имеет вид

$$r(\boldsymbol{u}) = (a/R^2)(R^2 - |\boldsymbol{u}|^2). \tag{2}$$

Задаче (1), (2) отвечает ситуация (см. п. 1), когда сканирование проводится постоянным телесным углом α и регистрирующий прибор движется над плоскостью наблюдения по параболической траектории. В этом случае

$$a = h \sin(\alpha/2),$$

где h — максимальное удаление регистратора от плоскости объекта.

3. Заменим уравнения(1), (2) близким к ним уравнением в предположении, что в формуле (2) $a \ll R$. Это оправдано в прикладном аспекте, обсуждавшемся выше.

Обозначим через Ω группу комплексных дробно-линейных (конформных) преобразований круга D_R, рассматриваемого как область в комплексной плоскости. Преобразования из Ω в комплексных координатах имеют вид

$$\omega_{\Theta,\alpha}(z) = R^2 e^{i\Theta}\frac{z+\alpha}{R^2+\bar{\alpha}z}, \tag{3}$$

где $0 \leqslant \Theta < 2\pi$, $\alpha \in D_R$.

При $\Theta=0$ преобразования, определенные формулой (3), будем обозначать через ω_α.

Рассмотрим круг D_a с центром в нуле радиусом a, меньшим, чем R. Простые вычисления показывают, что образом $\omega_\alpha(D_a)$ круга D_a при отображении ω_α является круг радиусом

$$r_\alpha = R^2 a[(R^2-|\alpha|^2)/(R^4-a^2|\alpha|^2)] \qquad (4)$$

с центром

$$c_\alpha = \alpha R^2(R^2-a^2)/(R^4-a^2|\alpha|^2). \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует соотношение

$$\frac{r_\alpha}{R^2-|c_\alpha|^2} = \frac{a}{R^2}\,\frac{1-\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(\frac{|\alpha|}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^4\left(\frac{|\alpha|}{R}\right)^2}.$$

Поскольку $|\alpha|/R<1$, то

$$r_\alpha = (a/R^2)(R^2-|c_\alpha|^2)(1+\eta(\alpha, a)),$$

где $\eta(\alpha, a)$ — величина второго порядка малости относительно параметра a/R.

Итак, при малых a/R радиус круга $\omega_\alpha(D_a)$ с высокой степенью точности связан с координатами (x, y) своего центра c_α соотношением $r(x, y)=(a/R^2)(R^2-x^2-y^2)$, совпадающим с (2), и задача сводится к определению функции f по известным интегралам:

$$\int\limits_{\omega_\alpha(D_a)} f(x, y)\,dxdy = J(\alpha). \qquad (6)$$

4. Перейдем к получению формулы обращения для уравнения (6). Отметим, что вопрос о единственности решения уравнения (6) и некоторые другие связанные с этим уравнением вопросы затрагивались в работе [1].

Будем полагать $R=1$, поскольку случай произвольного R сводится к случаю $R=1$ с помощью растяжения переменных.

Введем характеристическую функцию круга D_a:

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & z\in D_a, \\ 0, & z\notin D_a. \end{cases}$$

Тогда (6) можно переписать в виде

$$\int\limits_D \chi\left(\omega_\alpha^{-1}z\right) f(z)\,dxdy = J(\alpha), \qquad z=x+iy, \qquad (7)$$

где ω_α^{-1} — элемент группы Ω, обратный к ω_α, т. е. отображение ω_α^{-1} обратно к ω_α.

Введем вместо f новую неизвестную функцию $g(z)=(1-|z|^2)^2 f(z)$. Тогда согласно (7) g удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_D \chi\left(\omega_\alpha^{-1}z\right) g(z)\,d\mu(z) = J(\alpha). \qquad (8)$$

Здесь мера $d\mu(z)=(1-|z|^2)^{-2}dxdy$.

Замена переменной z на $e^{i\theta}z$, $0\leqslant\theta<2\pi$, в (8) приводит к равенству

$$\int\limits_D \chi\left(\omega_\alpha^{-1}z\right) g(e^{i\theta}z)\,d\mu(z) = J(e^{i\theta}\alpha),$$

интегрируя обе части которого получим

$$\int\limits_D \chi\left(\omega_\alpha^{-1}z\right) g^*(z)\,d\mu(z) = J^*(\alpha), \qquad (9)$$

где

$$g^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\Theta}z)\,d\Theta,\quad J^*(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J(e^{i\Theta}\alpha)\,d\Theta.$$

Все функции в (9) радиальны, т. е. зависят только от расстояния своего аргумента до начала координат. Левую часть (9) можно рассматривать как свертку двух функций на группе Ω или изоморфной ей группе $SL_2(R)$ матриц второго порядка с определителем единица. При этом сомножители в свертке постоянны на двусторонних классах смежности по подгруппе $K\subset\Omega$ вращений круга. Здесь использован также тот факт, что мера $d\mu$ инвариантна относительно преобразований (3) из Ω. Указанное обстоятельство позволяет, применяя K-сферическое преобразование Фурье в круге [2], переписать левую часть (9) в виде произведения интегралов — K-сферических преобразований функций χ и g^*.

Поясним конструкцию K-сферического преобразования Фурье. Пусть φ — произвольная радиальная функция в круге, удовлетворяющая условию

$$\int_D |\varphi(z)|\,d\mu(z)<\infty,\quad \int_D |\varphi(z)|^2\,d\mu(z)<\infty.$$

Рассмотрим функцию $P\varphi$, заданную в верхней полуплоскости $\Pi_+\{w:$ $:\operatorname{Im} w>0\}$ формулой

$$(P\varphi)(w)=\varphi(\varkappa w),$$

где $\varkappa:\Pi_+\to D$ — преобразование Кэли:

$$\varkappa w=(w-i)/(w+i). \tag{10}$$

Тогда K-сферическое преобразование Фурье функции φ определяется так:

$$\mathcal{F}\varphi=MHP\,\varphi, \tag{11}$$

где значение оператора H на функции ψ, заданной в полуплоскости Π_+, определяется формулой

$$(H\psi)(y)=\frac{1}{y}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y)\,dx\quad (y>0),$$

M — преобразование Меллина.

5. Применяя преобразование (11) к обеим частям уравнения (9), получим

$$\mathcal{F}\chi\mathcal{F}g^*=\mathcal{F}J^*. \tag{12}$$

Прямое несложное вычисление дает

$$(\mathcal{F}\chi)(\lambda)=\frac{2}{1-a^2}\int_{\frac{1-a}{1+a}}^{\frac{1+a}{1-a}} y^{i\lambda-2}\,[4a^2-(1+a^2-(1-a^2)^2y)^2]^{1/2}\,dy.$$

Этот интеграл может быть выражен через гипергеометрическую функцию

$$(\mathcal{F}\chi)(\lambda)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{i\lambda-2}F\left(2-i\lambda,\,3/2,\,3,\,\frac{-4a}{(1+a)^2}\right). \tag{13}$$

Далее, используя (10), (11) и определение J^* в (9), получим

$$(\mathcal{F}J^*)(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} y^{i\lambda-2}J\left(e^{i\Theta}\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right)d\Theta\,dx\,dy.$$

Из (12) на основании формулы обращения для преобразования $\mathcal{F}$ [2] имеем

$$g^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F} g^*)(\lambda) \lambda \operatorname{th}(\pi\lambda)\, d\lambda. \tag{14}$$

Поскольку $g(0) = g^*(0)$, то (14) определяет значение g в нуле.

Пусть $\alpha \in D$ произвольна и ω_α — отображение из Ω, переводящее начало координат в точку α. Подставим в левую часть (9) вместо g суперпозицию $g \circ \omega_\alpha$. Делая в интеграле замену переменной w на $\omega_\alpha w$ и учитывая инвариантность меры $d\mu$ относительно такой замены, получим для функции $g \circ w_\alpha$ такое же уравнение (9), как и для g, но с правой частью $J_\alpha(w) = J^*\left(\omega_\alpha^{-1} w\right)$. Применяя (12), (14), получим

$$g(\alpha) = (g \circ \omega_\alpha)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{F}\chi(\lambda)]^{-1} (\mathcal{F} J_\alpha)(\lambda) \lambda \operatorname{th}(\pi\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Наконец, учитывая соотношения $g(\alpha) = (1 - |\alpha|^2) f(\alpha)$ и формулы (3), (10), (11), (13), (15), приходим к формуле для вычисления искомой функции f:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} (1 - |\alpha|^2)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{2-i\lambda} \left[F\left(2 - i\lambda, 3/2, 3, \frac{-4a}{(1+a)^2}\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times f_1(\lambda, \alpha) \lambda \operatorname{th}(\pi\lambda)\, d\lambda, \tag{16}$$

где

$$f_1(\lambda, \alpha) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y^{i\lambda - 2} J\left(e^{i\Theta} s(\alpha, x + iy)\right) d\Theta dx dy,$$

$$s(\alpha, w) = \frac{w(1+\alpha) - i(1-\alpha)}{w(1+\overline{\alpha}) + i(1-\overline{\alpha})}.$$

Остается добавить, что функцию $J(\alpha)$ можно выразить через правую часть $I(\boldsymbol{u})$ уравнения (1) при помощи соотношения (5) между α и центром $\boldsymbol{u} = c_\alpha$ круга $\omega_\alpha(D_a)$.

При необходимости можно перейти в (16) к вещественным переменным.

Автор выражает благодарность Р. Д. Баглаю, Е. С. Нежевенко и О. Е. Трофимову за обсуждение возможных приложений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аграновский М. Л.** Преобразование Фурье на $SL_2(R)$ и теоремы типа Морера.— ДАН СССР, 1978, т. 243, № 6, с. 1353—1356.
2. **Ленг С.** $SL_2(R)$. М., Мир, 1977.

Поступила в редакцию 29 ноября 1979 г.