УДК 681.2.082

В. М. ЕФИМОВ, А. А. НЕСТЕРОВ, А. Л. РЕЗНИК

(Новосибирск)

АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПОИСКА ТОЧЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ОБЪЕКТОВ

Введение. Под точечным объектом ниже будет пониматься световой мени. Оптимальный алгоритм поиска должен, как правило, удовлетворять одному из двух требований [1]:

а) либо минимизировать суммарное поисковое усилие, необходимое для обнаружения объекта;

б) либо максимизировать полную вероятность обнаружения при наличии ограниченного поискового усилия.

Рассмотрим один из вариантов постановки одномерной задачи поиска. Пусть известно, что пуассоновский источник «вспышек» интенсивности λ находится на оси x с априорной плотностью распределения $f(x)$. Требуется с помощью регистрирующего устройства за минимальное время определить местоположение источника с заданной точностью ε. Такая постановка задачи соответствует случаю а, когда поисковым усилием является время. Вводя в рассмотрение бинарную функцию $u(x, t)$, описывающую окно обзора в момент времени t, для среднего времени от начала поиска до регистрации первой вспышки получим соотношение

$$\langle\tau\rangle = \lambda \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx t f(x)\, u(x, t) \exp\left(-\lambda \int_0^t u(x, \xi)\, d\xi\right). \qquad (1)$$

Одношаговые алгоритмы поиска. Для произвольного априорного распределения источника на оси x построение даже одношаговой (т. е. заканчивающейся при регистрации первой вспышки) оптимальной процедуры поиска вызывает значительные трудности. Ограничимся сначала одношаговыми периодическими алгоритмами поиска, при которых относительная нагрузка $\varphi(x)$ на одну точку x (т. е. относительное время пребывания точки x в окне обзора) не зависит от времени. При таком подходе задача заключается в нахождении функции $\varphi(x)$, минимизирующей среднее время поиска

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\lambda} \int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx \qquad (2)$$

при условии, что

$$\int \varphi(x)\, dx = \varepsilon, \qquad (2а)$$

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1. \qquad (2б)$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, будем искать функцию $\varphi(x)$, доставляющую минимум выражению

$$\int \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \mu\varphi(x)\right] dx,$$

откуда, дифференцируя по φ и принимая во внимание ограничение (2а),

$$\varphi(x) = \varepsilon \sqrt{f(x)} \Big/ \int \sqrt{f(x)}\, dx. \qquad (3)$$

Если при этом не нарушается условие (2б), то функция (3) является решением поставленной экстремальной задачи. Если же для некоторых x решение $\varphi(x) > 1$, то в этих точках нужно положить $\varphi(x) = 1$, а для остальных точек требуется повторить вычисление неопределенного множителя μ с уже изменившимися условиями (2) и (2а). После этого в качестве оптимальной стратегии поиска может быть выбрана любая бинарная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\int u(x, t)\, dx = \varepsilon; \quad \int_0^t u(x, \xi)\, d\xi = \varphi(x)\, t.$$

В общем случае построение оптимального (т. е. не обязательно периодического) одношагового алгоритма поиска неизвестного пуассоновского источника связано с отысканием такой функции $\varphi(x, t)$ — относительной нагрузки на точку x в момент времени t, которая доставляла бы минимум функционалу

$$\langle\tau\rangle = \int dt \int dx f(x) \exp\left(-\lambda \int_0^t \varphi(x, \xi)\, d\xi\right) \tag{4}$$

при условии, что

$$\int \varphi(x, t)\, dx = \varepsilon \quad \text{для любого } t, \tag{4а}$$

$$0 \leqslant \varphi(x, t) \leqslant 1. \tag{4б}$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем в рассмотрение функцию $\alpha(x, t) = \int_0^t \varphi(x, \xi)\, d\xi$, соответствующую полному времени пребывания точки x в окне обзора от начала поиска до момента времени t. Чтобы учесть ограничения (4а) и (4б), вводим неопределенный множитель Лагранжа $\mu(t)$. Тогда задача нахождения оптимальной стратегии сводится к нахождению функции $\alpha(x, t)$, минимизирующей функционал

$$\int dt \int dx\, [\exp(-\lambda\alpha(x, t)) f(x) + \mu(t)\, \alpha(x, t)] \tag{5}$$

с ограничениями

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, t)\, dx = \varepsilon t, \tag{5а}$$

$$0 \leqslant \alpha(x, t) \leqslant t. \tag{5б}$$

Решением этой вариационной задачи является функция

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)} < 0; \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)}, & 0 \leqslant \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)} \leqslant t; \\ t, & t < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda f(x)}{\mu(t)}, \end{cases} \tag{6}$$

причем множитель $\mu(t)$ определяется из соотношения (5а). Оптимальная стратегия поиска $u(x, t)$ должна принадлежать классу бинарных функций. Она находится из соотношений

$$\int_0^t u(x, \xi)\, d\xi = \alpha(x, t); \quad \int u(x, t)\, dx = \varepsilon.$$

Применение на практике оптимальных алгоритмов поиска сопряжено с определенными трудностями. Дело в том, что оба приведенных алгоритма оптимального одношагового поиска, когда априорная плотность распределения сигнального источника отлична от константы, как правило, не могут быть физически реализованы путем перемещения неразрывного окна шириной ε. Поэтому в реальных поисковых системах одношаговую процедуру целесообразно организовывать по следующему методу. Предварительно интервал $(0, L)$ разбивается на дискреты с шагом ε, и на каждом из них «ступенчато» аппроксимируется априорно заданная плотность $f(x)$. При этом ε считается достаточно малой величиной, чтобы можно было пренебречь вариацией функции $f(x)$ в пределах одного дискрета. Поиск в соответствии с процедурой оптимального одноэтапного обнаружения должен начинаться с осмотра только самой высокой ступеньки плотности, затем через некоторое время t_1 окно поочередно устанавливается на участки под двумя самыми высокими ступеньками, через время t_2 ведется поочередный осмотр уже трех участков и т. д. Все времена t_i при этом однозначно определяются по описанной методике нахождения оптимальной функции $\alpha(x, t)$.

Следует отметить, что такая организация поиска предполагает, что заранее известна интенсивность источника λ. Если же такая априорная информация отсутствует, то может быть рекомендована периодическая процедура, не зависящая от этой интенсивности. В соответствии с ней должны быть вычислены интегралы от плотности $f(x)$ в каждом из дискретов. Если дискретов насчитывается m, а площади над ними — P_1, P_2, ..., P_m, то окно обзора должно циклически «пробегать» все дискреты с относительной нагрузкой $\beta_i = \sqrt{P_i} \Big/ \sum\limits_{j=1}^{m} \sqrt{P_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$ соответственно. Эти значения β_i легко получить, если опять применить метод неопределенных множителей Лагранжа для минимизации среднего времени поиска

$$\langle\tau\rangle = (1/\lambda)(P_1/\beta_1 + P_2/\beta_2 + \ldots + P_m/\beta_m) \tag{7}$$

с ограничением

$$\beta_1 + \ldots + \beta_m = 1. \tag{8}$$

Многошаговые алгоритмы поиска. Если же не ограничиваться одношаговыми процедурами, а сразу считать алгоритм поиска многошаговым процессом, заканчивающимся при регистрации n-й вспышки, то оптимальная стратегия должна доставлять минимум функционалу

$$\langle\tau\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_0^\infty dx f(x) \int \ldots \int t_k \left\{ \prod_{l=1}^{k} \left[dt_l u_l \left(x, \sum_{m=1}^{l} t_m, t_1, \ldots, t_{l-1} \right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \exp\left(-\lambda \int\limits_{\sum_{m=1}^{l-1} t_m}^{\sum_{m=1}^{l} t_m} u_l(x, \xi, t_1, \ldots, t_{l-1}) d\xi \right) \right] \right\}, \tag{9}$$

причем

$$\int u_n(x, t, t_1, \ldots, t_{n-1})\, dx = \varepsilon, \tag{10}$$

где $u_i(x, t, t_1, \ldots, t_{i-1})$ — стратегия поиска на i-м шаге при условии, что интервалы между первыми $(i-1)$ вспышками были соответственно t_1, t_2, ..., t_{i-1}.

Нахождение оптимальной стратегии $u(x, t)$, минимизирующей функционал (9) при ограничении (10), в общем случае не представляется возможным. В то же время для важного частного случая, когда $f(x) = \mathrm{const}$, аналитическое решение достаточно просто.

Пусть

$$\begin{cases}\frac{1}{L}, & x \in (0, L),\end{cases}$$

$x \in (0, L)$. Реализовать такую нагрузку можно, например, [illegible] ным сканированием [2] всего интервала $(0, L)$ щелью некоторой ширины l_1 (конец интервала должен быть замкнут на его начало, образуя окружность длиной L). При регистрации вспышки поиск продолжается, но уже внутри окна шириной l_1 с помощью другой щели шириной l_2. Если мы рассматриваем n-этапный поиск, то на последнем шаге он ведется щелью шириной ε (это продиктовано условиями задачи). Тогда среднее время поиска

$$\langle\tau_n\rangle = (1/\lambda)(L/l_1 + l_1/l_2 + \ldots + l_{n-1}/\varepsilon). \tag{11}$$

Для фиксированного n можно найти оптимальные значения $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$, минимизирующие выражение (11):

$$L/l_1 = l_1/l_2 = \ldots = l_{n-1}/\varepsilon = (L/\varepsilon)^{1/n}. \tag{12}$$

Тогда соотношение для среднего времени оптимального n-шагового поиска примет вид

$$\langle\tau_n\rangle_{\text{опт}} = (n/\lambda)(L/\varepsilon)^{1/n}. \tag{13}$$

Теперь из выражения (13) можно найти и оптимальное количество шагов n, минимизирующее среднее время поиска. Так как функция $xa^{1/x}$ при $a > 1$ имеет лишь одну точку минимума ($x = \ln a$), то оптимальное значение ($n_{\text{опт}}$) всегда есть либо $[\ln L/\varepsilon]$, либо $[\ln L/\varepsilon] + 1$. Когда $L/\varepsilon \gg 1$, можно считать $n_{\text{опт}} \cong \ln L/\varepsilon$. Поэтому справедливы такие асимптотические соотношения:

$$L/l_1 = l_1/l_2 = \ldots = l_{n-1}/\varepsilon = e, \tag{14}$$

$$\langle\tau\rangle_{\text{опт}} = (n_{\text{опт}}/\lambda)\,(L/\varepsilon)^{1/n_{\text{опт}}} = (e/\lambda)\ln L/\varepsilon. \tag{15}$$

Таким образом, многошаговая процедура дает выигрыш по сравнению с одношаговым поиском (для одношагового поиска в рассматриваемом случае среднее время обнаружения $\langle\tau_1\rangle_{\text{опт}} = L/(\lambda\varepsilon)$), причем этот выигрыш неограниченно возрастает с ростом отношения L/ε.

Теперь можно сравнить найденную оптимальную процедуру поиска с некоторыми упрощенными алгоритмами. Например, если поиск организовать по принципу дихотомии, то среднее время поиска объекта

$$\langle\tau\rangle_2 = (2/\lambda)\log_2(L/\varepsilon) = (2/\lambda\ln 2)\ln L/\varepsilon, \tag{16}$$

т. е. дихотомический поиск дает по сравнению с оптимальной процедурой небольшой ($\approx 6\%$) проигрыш во времени. Еще ближе к оптимальной процедуре трихотомический поиск, при котором интервал $(0, L)$ последовательно разбивается на три части. Для него проигрыш во времени составляет лишь

$$(3/\ln 3 - e)/e \approx 0{,}4\ \%.$$

Естественно ожидать, что и для произвольного априорного распределения $f(x)$ многошаговая процедура поиска по сравнению с одношаговой может дать существенный выигрыш во времени, особенно при больших значениях L/ε. Так как минимизация функционала (9) при ограничении (10) в каждом конкретном случае представляет собой весьма сложную задачу, то наиболее реальной с точки зрения практического исполнения представляется многошаговая периодическая процедура поиска.

фактически не уступает оптимальной). Затем вычисляются значения

$$P_1 = \int\limits_0^{L/3} f(x)\,dx; \quad P_2 = \int\limits_{L/3}^{2L/3} f(x)\,dx; \quad P_3 = \int\limits_{2L/3}^{L} f(x)\,dx.$$

Для любого интервала времени Δt окно шириной $L/3$ будет периодически «пробегать» все три участка так, чтобы $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t$, где $\Delta t_i/\Delta t = \beta_i$ — относительное время присутствия окна на каждом из подынтервалов $(0, L/3)$, $(L/3, 2L/3)$, $(2L/3, L)$.

При регистрации вспышки поиск продолжается аналогичным образом на том из участков, где зафиксирована вспышка (т. е. этот участок снова делится на три части, заново вычисляются коэффициенты β_1, β_2, β_3 и т. д.). Так как при такой процедуре минимизация среднего времени поиска сводится к минимизации времени поиска на каждом из шагов, то для полного ее описания достаточно определить по уже приводившейся схеме коэффициенты β_1, β_2, β_3. Так, на первом этапе их значения равны $\sqrt{P_i}\Big/\sum\limits_{j=1}^{3}\sqrt{P_j}$ $(i = 1, 2, 3)$. Универсальность предлагаемой процедуры заключается еще и в том, что для ее реализации не требуется априорной информации об интенсивности источника.

Авторы выражают благодарность З. А. Лившицу за участие в обсуждении материала и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Катыс Г. П. Автоматическое сканирование. М., Машиностроение, 1969.
2. **Ефимов В. М., Искольдский А. М., Лившиц З. А., Крендель Ю. М.** О характеристиках различных методов считывания изображений дискретных структур.— Автометрия, 1973, № 1.

Поступила в редакцию 22 октября 1979 г.