На каждом шаге найденное значение $\bar{u}^k[\bar{x}^k[n]]$ используется в качестве управляющего воздействия; таким образом, в процессе адаптации осуществляется дуальное управление, хотя практически на первых шагах для того, чтобы не «тормошить» объект заведомо далекими от оптимальных воздействиями, лучше воздержаться от использования восстановленных значений $\bar{u}^k[\bar{x}^k[n]]$ в качестве управления.

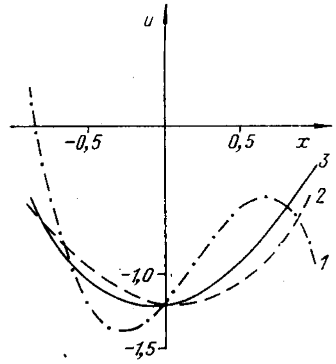

Рис. 2.

Предложенный подход может быть использован как для стабилизации состояний объектов АСУ ТП, так и для различных исследований, связанных с созданием и использованием динамических моделей процессов. Был поставлен ряд экспериментов по управлению переопределенными объектами. Программа, составленная на языке ФОРТРАН для ЭВМ «Минск-32», работала с моделями первого и третьего порядков, а также с моделью первого порядка с транспортным запаздыванием, идентифицируя одномерное оптимальное с точки зрения предложенного критерия управление. На рис. 1 приведены результаты управления устойчивым линейным трехмерным объектом.

Вектор состояния (x_1, x_2, x_3) имеет область задания (0,95÷1,05; —0,305÷÷—0,295; —0,505÷—0,495). На первых 40 шагах идентификация осуществляется при равномерно распределенном случайном управляющем воздействии с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,5, смешанном со стационарным гауссовским шумом, имеющим нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную 0,16. Затем идентифицируемый управляющий сигнал подается на вход, и дальнейшая адаптация происходит в дуальном режиме; гауссовский шум продолжает аддитивно действовать на вход системы.

Оптимальное управление является функцией трех переменных; на рис. 2 показаны сечения этой функции после того, как процесс идентификации закончен: *1* — сечение гиперповерхностью $x_1=x_2=0$; *2* — $x_2=x_3=0$; *3* — $x_1=x_3=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kiefer E., Wolfowitz J.** Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function.— Ann. Math. Statist., 1952, vol. 23, N 3, p. 462—466.
2. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах. М., Наука, 1968.
3. **Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И.** Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М., Наука, 1970.

Поступило в редакцию 18 сентября 1979 г.

УДК 539.108

А. Л. РЕЗНИК

(Новосибирск)

ОБ ОЦЕНКЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОТОКОВ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ОТСЧЕТОВ

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с оценкой параметров входящих и выходящих потоков в различного рода регистрирующих и счетно-измерительных устройствах.

Рассмотрим сначала «идеальный» регистратор, на вход которого поступает пуассоновский поток импульсов. Пусть счетчик регистратора не имеет «мертвого» времени, так что каждый поступивший импульс автоматически является отсчетом. Если требуется оценить интенсивность входящего потока λ, то в принципе возможны два варианта проведения эксперимента:

а) подсчет n — количества отсчетов, зарегистрированных за время t_0, где t_0 заранее фиксируется;

б) измерение времени t, необходимого для набора n_0 отсчетов, где заранее фиксируется уже не t, а n_0.

В первом случае в соответствии с [1] n — достаточная статистика для λ, и наилучшую несмещенную оценку можно получить из уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t_0) \frac{(\lambda t_0)^n}{n!} \widehat{\lambda}(n) \equiv \lambda \quad (0 \leqslant \lambda < \infty). \tag{1}$$

Здесь $\widehat{\lambda}(n)$ не должно зависеть от λ и решение (1) есть

$$\widehat{\lambda}(n) = n/t_0. \tag{1.1}$$

Аналогичное уравнение «несмещенности» для случая «б» имеет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n_0} t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \exp(-\lambda t) \widehat{\lambda}(t)\, dt \equiv \lambda \quad (0 \leqslant \lambda < \infty). \tag{2}$$

Решение этого интегрального уравнения, являющееся наилучшей несмещенной оценкой для λ, есть

$$\widehat{\lambda}(t) = (n_0 - 1)/t, \tag{2.1}$$

причем $n_0 \geqslant 2$ (при $n_0 = 1$ $\widehat{\lambda}(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, т. е. несмещенная оценка для λ теряет смысл).

Дисперсии рассмотренных оценок определяются соотношениями

$$D(\widehat{\lambda}(n)) = M(\widehat{\lambda}(n))^2 - \lambda^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t_0) \frac{(\lambda t_0)^n}{n!} \left(\frac{n}{t_0}\right)^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda}{t_0}; \tag{3}$$

$$D(\widehat{\lambda}(t)) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n_0} t^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \exp(-\lambda t) \left(\frac{n_0-1}{t}\right)^2 dt - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{n_0-2} \quad (n \geqslant 3). \tag{4}$$

Вторая оценка обеспечивает постоянство относительной ошибки $\sigma_{\text{отн}} = \sqrt{D(\widehat{\lambda}(t))}/\lambda = 1/\sqrt{n_0 - 2}$, в то время как для первой оценки относительная погрешность равняется $1/\sqrt{\lambda t_0}$, т. е. зависит от λ. При исследовании статистических характеристик реальных регистрирующих устройств нужно учесть, что все они обладают «мертвым» временем, в течение которого их счетчики (или пересчетные схемы) «заперты», так что регистрация отсчетов в эти моменты не происходит. Различают два типа счетчиков: с «мертвым» временем непродлевающегося типа (когда поступающие в «мертвые» времена импульсы просто игнорируются) и с «мертвым» временем продлевающегося типа (когда поступающий в «мертвое» время импульс опять-таки не приводит к регистрации отсчета, но устанавливает начало еще одного «мертвого» времени).

Для счетчиков с непродлевающимся «мертвым» временем справедливо соотношение [2]

$$\nu = \lambda/(1 + \lambda\bar{\tau}), \tag{5}$$

где ν — интенсивность регистрации отсчетов, λ — интенсивность входящего пуассоновского потока, а $\bar{\tau}$ — средняя продолжительность «мертвого» времени. В работе [2] также приводится аналогичная формула для счетчиков с продлевающимся «мертвым» временем

$$\nu = \lambda \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-\lambda\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Здесь $f(\tau)$ — дифференциальный закон (т. е. плотность) распределения флуктуирующего «мертвого» времени τ.

Формула (6) неверна. В самом деле, соотношение, определяющее интенсивность регистрации, имеет вид

$$\nu = \lambda \exp(-\lambda\bar{\tau}). \tag{7}$$

Это соотношение может быть получено, например, с использованием одного результата, приведенного в [3]. Для этого процесс регистрации частиц следует представить как обслуживание пуассоновского потока заявок системой с бесконечным числом каналов. Обслуживание начинается моментально любым свободным каналом и продолжается в течение случайного времени τ, имеющего плотность распределения $f(\tau)$. Интересующий нас вопрос сводится, таким образом, к отысканию вероятности $P(t)$ того, что система полностью свободна в момент времени t. В монографии [3] доказано, что

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \exp(-\lambda\bar{\tau}), \tag{8}$$

откуда сразу же следует (7).

Соотношения типа (5) или (7) иногда используются для получения оценки неизвестного параметра λ [4]. Следует заметить, что такое обращение формул (5) и (7) не вполне корректно. Более того, если эксперимент состоял в подсчете зарегистрированных за фиксированное время t_0 импульсов, то для интенсивности входящего пуассоновского потока λ не существует не только наилучшей, но даже просто несмещенной оценки. Этот факт нетрудно установить исходя из формул для $\pi(k, t)$ — вероятностей регистрации ровно k отсчетов за время t, приводимых, например, в [5, 6].

Для получения несмещенных оценок эксперимент должен заключаться в измерении времени t, необходимого для набора фиксированного числа отсчетов n_0. Тогда, если схема регистратора такова, что позволяет измерять и суммарное время $t_{св}$, в течение которого счетчик был свободен, наилучшей несмещенной оценкой параметра λ, как уже говорилось, будет $\hat{\lambda} = (n_0 - 1)/t_{св}$.

В частности, для счетчиков с непродлевающимся и нефлуктуирующим «мертвым» временем τ не требуется и этого, так как

$$t_{св} = t - (n-1)\tau \text{ и } \hat{\lambda} = (n_0 - 1)/(t - (n_0 - 1)\tau).$$

Одним из наиболее эффективных приемов получения оценок для интенсивности входящих импульсных потоков является использование многокаскадных схем совпадений. Но для этого требуется знание среднего числа случайных кратных совпадений, чтобы по отклонению экспериментальных (умышленно не совсем случайных) данных от теоретически рассчитанных можно было судить о величине входящей интенсивности. Рассмотрим простейший вариант такой регистрации. Имеется два независимых потока прямоугольных и равных по амплитуде импульсов. Обозначим длины импульсов в потоках через τ_1 и τ_2 и предположим, что паузы между ними имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. В [2] приводится, а в [4] повторяется вывод соотношения для $\bar{M}_{12\,случ}$ — среднего числа случайных двойных совпадений за время T. Согласно этим результатам,

$$\bar{M}_{12случ} = \frac{\lambda_1\lambda_2 T}{\lambda_1 - \lambda_2} \{\exp[-\lambda_2(\tau_1 + \tau_2)] - \exp[-\lambda_1(\tau_1 + \tau_2)]\}. \tag{9}$$

Но в этом соотношении не учитывается возможность того, что один импульс может участвовать в двух актах регистрации совпадений. Для получения точной формулы достаточно заметить, что вероятность ωdt регистрации совпадения на бесконечно малом интервале dt есть

$$\omega dt = (\lambda_1 dt) P_1(0) P_2(1) + (\lambda_2 dt) P_2(0) P_1(1), \tag{10}$$

где $P_i(0)$ — вероятность того, что i-й канал свободен, а $P_i(1)$ — вероятность того, что i-й канал уже занят ранее поступившим импульсом. Для описанного простейшего случая

$$P_i(0) = (1/\lambda_i)/(1/\lambda_i + \tau_i) = 1/(1 + \lambda_i\tau_i), \text{ а}$$

$$P_i(1) = \tau_i/(1/\lambda_i + \tau_i) =$$

$$= \lambda_i\tau_i/(1 + \lambda_i\tau_i),$$

поскольку $1/\lambda_i$ — математическое ожидание паузы между импульсами в i-м канале.

В итоге получаем формулу

$$\bar{M}_{12\,случ} = \lambda_1\lambda_2(\tau_1 + \tau_2) T / [(1 + \lambda_1\tau_1)(1 + \lambda_2\tau_2)], \tag{11}$$

справедливую при любых загрузках обоих каналов.

Нетрудно видеть, что аналогичное рассуждение легко распространяется на произвольное количество каналов (рассматриваемые совпадения соответственно могут быть двойными, тройными и т. д.). Например, для пуассоновских потоков импульсов скорость счета полностью случайных m-кратных совпадений

$$P_{mслуч} = \frac{(\lambda_1\bar{\tau}_1) \times \ldots \times (\lambda_m\bar{\tau}_m)}{(1 + \lambda_1\bar{\tau}_1) \times \ldots \times (1 + \lambda_m\bar{\tau}_m)} \left(\frac{1}{\bar{\tau}_1} + \ldots + \frac{1}{\bar{\tau}_m}\right). \tag{12}$$

При этом продолжительность импульсов в каждом из каналов предполагается случайной, но имеющей среднее $\bar{\tau}_i$ для i-го канала. Более того, (12) справедливо и при условии, что входные потоки не являются пуассоновскими. Достаточно лишь знать среднюю продолжительность паузы между импульсами в каждом из каналов.

Рассмотрение последнего вопроса с более общих позиций можно найти в [7].

Автор выражает благодарность В. М. Ефимову за внимание к работе и целый ряд полезных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика. М., ИЛ, 1960, § 42.
2. **Гольданский В. И., Куценко А. В., Подгорецкий М. И.** Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц. М., Физматгиз, 1959.
3. **Боровков А. А.** Вероятностные вопросы в теории массового обслуживания. М., Наука, 1972, с. 258.
4. **Курочкин С. С.** Многомерные статистические анализаторы. М., Атомиздат, 1968.
5. **Ramakrishnan A.** Counters with Random Dead Time.— Phil. Mag., 1954, vol. 45, p. 1050.
6. **Ruark A., Devol L.** The General Theory of Fluctuations in Radioactive Disintegration.— Phys. Rev., 1936, vol. 49, p. 355.
7. **Седякин Н. М.** Элементы теории случайных импульсных потоков. М., Сов. радио, 1965.

Поступило в редакцию 22 октября 1979 г.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В № 2 за 1980 г. замечены следующие опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
1	11-я (снизу)	Капенпекс	Капениекс
56	11-я (снизу)	приходит	приводит
70	14-я (сверху)	режим	режимы
86	7-я (снизу)	зарядов	зарядки