

6. Долгая Е. В., Магура И. С. Модификация уравнений Ходжкина — Хаксли применительно к мембране сомы гигантских нейронов моллюсков.— «Нейрофизиология», 1973, т. 5, № 3, с. 315.
7. Костюк П. Г., Крышталь О. А., Цыдренко А. Я. Разделение натриевых и кальциевых каналов в поверхностной мембране нервных клеток моллюсков.— «Нейрофизиология», 1976, т. 8, № 2, с. 183.
8. Kostyuk P. G., Krishtal O. A. Separation of sodium and calcium currents in the somatic membrane of mollusc neurones.— «J. Physiol.», 1977, vol. 270, p. 545—568.
9. Костюк П. Г. Механизмы электрической возбудимости нервной клетки.— В кн.: Современные проблемы общей физиологии возбудимых образований. Киев, «Наукова думка», 1978.
10. Дорошенко П. А., Костюк П. Г., Крышталь О. А. Действие кальция на мембрану сомы гигантских нейронов моллюсков.— «Нейрофизиология», 1973, т. 5, № 6, с. 621.
11. Akaike N., Lee K. S., Brown A. M. The calcium current of Helix neuron.— «J. Gen. Physiol.», 1978, vol. 71, N 5, p. 509—531.

Поступила в редакцию 23 апреля 1979 г.

УДК 621.391.26 : 612.172.4

А. А. ГАЗАРЯН, Д. С. МЕЛКОНЯН

(Ереван)

АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Введение. Быстрому прогрессу в течение последнего десятилетия в применении методов цифрового спектрального анализа к исследованию биологических систем в значительной степени способствовало наличие разнообразных программных и аппаратурных средств для использования алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), реализующих эффективные методы вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поэтому основные проблемы в области спектрального анализа биологических сигналов были связаны с вопросами интерпретации результатов спектрального анализа, их использования на дальнейших стадиях машинной обработки [1]. Однако интенсивные исследования в этих направлениях выдвинули ряд новых требований и к технике спектрального анализа, в особенности в отношении алгоритмов цифрового спектрального анализа переходных процессов в биологических системах.

Специфика обработки переходных процессов определяется тем, что результаты спектрального анализа, как правило, интерпретируются в виде частотных характеристик динамических систем с применением соответствующих теорий и расчетных методов. При этом, например, часто необходимо иметь значения частотных характеристик для логарифмических шкал частот [2], вычислять картины текущих и мгновенных спектров процессов [3].

Определенные особенности цифровой обработки переходных процессов связаны и со спецификой их экспериментального определения. Обычно переходные процессы (так называемые вызванные реакции биологических систем) регистрируются путем цифрового осциллографирования или методом синхронного накопления с помощью специализированных ЭВМ [4]. Поскольку при этом используется цифровая память ограниченного объема, необходима повышенная точность алгоритмов

спектрального анализа для расчета спектральных характеристик в возможно более широких частотных диапазонах.

Таким образом, конкретные особенности задач анализа переходных процессов в биологических системах требуют исследования и определенных усовершенствований алгоритмов цифрового спектрального анализа для удовлетворения противоречивых требований, обусловленных точностью, скоростью и эффективностью вычислений.

В ранее опубликованной работе [5] предлагался алгоритм цифрового спектрального анализа переходных биоэлектрических процессов зрительной системы на основе известного метода приближенного вычисления преобразований Фурье путем замены анализируемой функции кусочно-ломаной кривой. В последующем было показано [6], что этот метод, обозначаемый далее как КЛПФ (кусочно-линейное преобразование Фурье), обладает лучшей точностью, чем метод ДПФ.

В данной статье рассматриваются расчетные формулы метода КЛПФ для общего случая дискретизации с произвольно задаваемым неравномерным шагом, и на этой основе строятся алгоритмы цифрового спектрального анализа для переходных процессов двух основных типов: 1) переходные функции биосистем — «чистые» кривые переходных процессов, вызванные импульсной или единичной функцией, при дискретизации которых используется неравномерный шаг, построенный по закону геометрической прогрессии; 2) вызванные реакции общего вида — переходные процессы с наложенными случайными и ритмическими компонентами, при дискретизации которых используется равномерный шаг.

Произвольное расположение точек отсчета. Пусть $h(t)$ — исходная функция времени, описывающая анализируемый процесс, которая задана на отрезке времени $[t_0, t_N]$ дискретными значениями $h_k = h(t_k)$ в произвольно заданных точках t_k ($k = 0, \dots, N$), отвечающих условию $t_{k+1} > t_k$.

Для приближенного расчета спектральных характеристик аппроксимируем функцию $h(t)$ кусочно-ломаной кривой $\bar{h}(t)$, состоящей из отрезков прямых, сопрягающихся в точках h_k . При таком способе аппроксимации функция $\bar{h}(t)$ может быть представлена выражением

$$\bar{h}(t) = \sum_{k=1}^{N-1} h_k u_k(t - t_k) + h_0 v_0(t - t_0) + h_N v_N(t - t_N), \quad (1)$$

в которое входят треугольные функции, определяемые следующими соотношениями:

функция $u_k(t)$ —

$$\begin{aligned} u_k(t) &= 0 \quad \text{при } t > \Delta t_{k+1}; \quad t < \Delta t_k; \\ u_k(t) &= 1 - t/\Delta t_{k+1} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t_{k+1}; \\ u_k(t) &= 1 + t/\Delta t_k \quad \text{при } \Delta t_k \leq t < 0; \end{aligned} \quad (2)$$

функция $v_0(t)$ —

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 0 \quad \text{при } t < 0; \quad t > \Delta t_1; \\ v_0(t) &= 1 - t/\Delta t_1 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t_1; \end{aligned} \quad (3)$$

функция $v_N(t)$ —

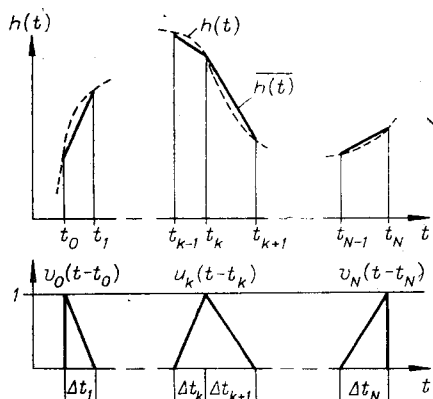
$$\begin{aligned} v_N(t) &= 0 \quad \text{при } t > 0; \quad t < \Delta t_N; \\ v_N(t) &= 1 + t/\Delta t_N \quad \text{при } \Delta t_N \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = 0, \dots, N). \quad (5)$$

Представление аппроксимирующей кусочно-ломаной функции в виде линейной комбинации треугольных функций показано на рис. 1.

Рис. 1. Аппроксимация анализируемого процесса $h(t)$ кусочно-ломаной кривой $\bar{h}(t)$ с разложением на треугольные составляющие.



Для получения приближенного выражения комплексного частотного спектра функции $h(t)$, определяемого формулой

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (6)$$

необходимо подставить в выражение (6), вместо функции $h(t)$, ее приближенное выражение, согласно

формуле (1), приняв функцию $\bar{h}(t)$ равной 0 за пределами отрезка $[t_0, t_N]$. Получаемое при этом приближенное выражение комплексного спектра может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \overline{H(j\omega)} = & \sum_{k=1}^{N-1} h_k U_k(j\omega) \exp(-j\omega t_k) + h_0 V(j\omega) \exp(-j\omega t_0) + \\ & + h_N V^*(j\omega) \exp(-j\omega t_N), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$U_k(j\omega) = \frac{1 + c_k - c_k \cos \omega \Delta t_k - \cos c_k \Delta t_k \omega}{\omega^2 c_k \Delta t_k} + \frac{j \sin c_k \omega \Delta t_k - c_k \sin \omega \Delta t_k}{\omega^2 c_k \Delta t_k}, \quad (8)$$

$$V(j\omega) = \frac{1 - \cos \omega \Delta t_N}{\omega^2 \Delta t_N} - \frac{j}{\omega} \left(1 - \frac{\sin \omega \Delta t_N}{\omega \Delta t_N} \right); \quad (9)$$

$V^*(j\omega)$ — сопряженная с $V(j\omega)$ функция комплексной частоты;

$$c_k = \Delta t_{k+1} / \Delta t_k. \quad (10)$$

Формулы (7)–(9) приводят к несложному алгоритму расчета спектральных характеристик процесса, дискретизированного с произвольно выбранным шагом. Этот алгоритм спектрального анализа не является эффективным в принятом смысле [7]. Однако его использование оправдано в тех случаях, когда выбором узловых точек в соответствии с конкретными особенностями анализируемого процесса можно добиться существенного сокращения избыточности исходных данных для спектрального анализа.

Смысл представления аппроксимирующей кусочно-ломаной кривой в виде суммы сдвинутых во времени треугольных функций определяется не только интересами построения машинного алгоритма для рассматриваемого случая, но и тем, что такая форма разложения создает определенные удобства при построении эффективных алгоритмов в тех случаях, когда узловые точки подчиняются определенной закономерности.

Алгоритм спектрального анализа переходных функций биосистем. В работе [8] в качестве эффективного средства сокращения избыточности данных при спектральном анализе кривых переходных процессов было предложено использовать неравномерный шаг дискретизации, построенный по закону геометрической прогрессии. Ниже с использованием этого принципа дискретизации на основе метода КЛПФ строится алгоритм цифрового спектрального анализа переходных функций биосистем.

Пусть точки t_k , в которых берутся отсчеты анализируемой переходной функции $h(t)$, расположены по закону геометрической прогрессии

$$t_k = t_0 c^k, \quad (11)$$

где $t_0 > 0$ — точка, в которой берется первый отсчет; $c > 1$ — показатель геометрической прогрессии.

В данном случае отношение (10) равно постоянной величине: $c_k = c$. Следовательно, у любого из треугольников $u_k(t)$ основание делится высотой на неравные отрезки, отношение которых равно постоянной c .

Введем обозначение $\omega(t) = u_k(t)$ при $\Delta t_k = 1$, $\Delta t_{k+1} = c$ и запишем следующее очевидное равенство:

$$u_k(t) = \omega(t/c^k \Delta t_0) \quad (k = 1, \dots, N-1), \quad (12)$$

где $\Delta t_0 = t_0(1 - 1/c)$.

Пусть $W(j\omega)$ — комплексный спектр функции $\omega(t)$. Тогда на основании (12) с учетом теоремы изменения масштаба может быть записано соотношение

$$U_k(j\omega) = c^k \Delta t_0 W(c^k \Delta t_0 j\omega). \quad (13)$$

Если вычислять функцию $\overline{H(j\omega)}$ для дискретного ряда частот:

$$\omega_i = \omega_0 c^i, \quad (14)$$

то с учетом (13) расчетное выражение (7) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \overline{H(j\omega_i)} = & \sum_{k=1}^{N-1} h_k c^k \Delta t_0 W(c^{k+i} \Delta t_0 j\omega_0) \exp(-j\omega_i t_k) + h_0 V(j\omega_i) \times \\ & \times \exp(-j\omega_i t_0) + h_N V^*(j\omega_i) \exp(-j\omega_i t_N). \end{aligned} \quad (15)$$

Расчетный алгоритм, согласно формуле (15), предоставляет в определенном смысле эффективный способ вычислений частотных функций с логарифмическим шагом по частоте, поскольку частотные спектры треугольных функций выражаются в виде линейной комбинации значений функции $W(j\omega)$ для фиксированных значений в логарифмической сетке частот.

Процедура расчета частотных спектров переходных функций на основе разработанного алгоритма реализована в виде программ, записанных на алгоритмических языках программирования ФОРТРАН-IV и АП (алгоритмический язык программирования ЭВМ семейства «Найри»).

Точность разработанного алгоритма и его эффективность в смысле сокращения избыточности исходных данных для спектрального анализа исследовались методами машинного моделирования на ряде типовых примеров.

На рис. 2 для системы управления зрачковым рефлексом, имеющей импульсную переходную функцию вида [9]

$$h_r(t) = 125t^2 \exp(-10t) \text{ (отн. ед.)},$$

представлены: a — функция $h_r(t)$, дискретизированная с неравномерным шагом, согласно (11), при $c = 1,12202$ (20 отсчетов на декаду); b — кривые амплитудной вещественной и мнимой частотных характеристик в логарифмической шкале частот; v — соответствующие кривые ошибок расчета частотных характеристик; точечная кривая представляет кривую ошибок расчета амплитудной характеристики по равноотстоящим отсчетам.

В этом примере практически равная точность расчетов получена в случае неравномерного шага дискретизации по 40 отсчетам и равномерного — по 240.

Практически при использовании рассмотренного алгоритма в зависимости от характера анализируемой кривой избыточность данных сокращается от 5 до 10 раз.

Алгоритм спектрального анализа вызванных реакций общего вида. Вызванные реакции общего вида состоят из собственно кривой пере-

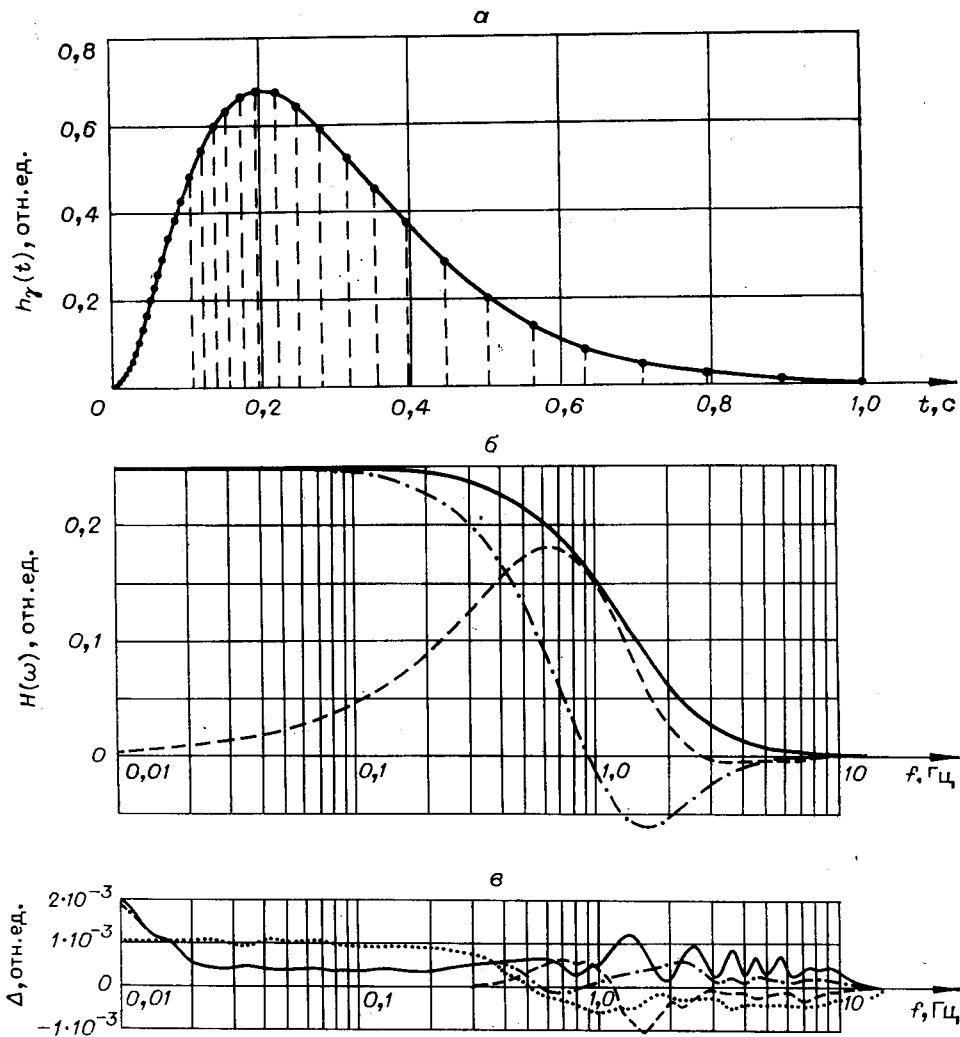


Рис. 2. Расчет частотных характеристик системы управления зрачковым рефлексом по равномерноотстоящим отсчетам импульсной переходной функции.

ходного процесса и наложенных на нее случайных и ритмических составляющих. Характерным примером процесса такого рода являются усредненные вызванные потенциалы мозга.

При цифровой обработке реакций общего вида исходными данными для спектрального анализа служат значения равномерноотстоящих ординат анализируемой функции $h(t)$ в точках $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, \dots, N$), где Δt — шаг дискретизации. В этом случае параметры c_k и Δt_k , входящие в формулы (8) и (9), имеют постоянные значения, не зависящие от индекса k : $c = 1$, $\Delta t_k = \Delta t$. В соответствии с этим выражение (7) может быть представлено в виде

$$\overline{H(j\omega)} = 2 \frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega^2 \Delta t} \sum_{k=1}^{N-1} h_k \exp(-j\omega k \Delta t) + h_0 V(j\omega) \exp(-j\omega t_0) + h_N V^*(j\omega) \exp(-j\omega t_N), \quad (16)$$

где

$$V(j\omega) = \frac{1 - \cos \omega \Delta t}{\omega^2 \Delta t} - \frac{j}{\omega} \left(1 - \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega \Delta t} \right).$$

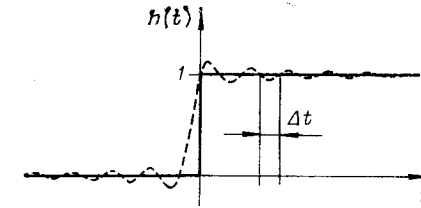
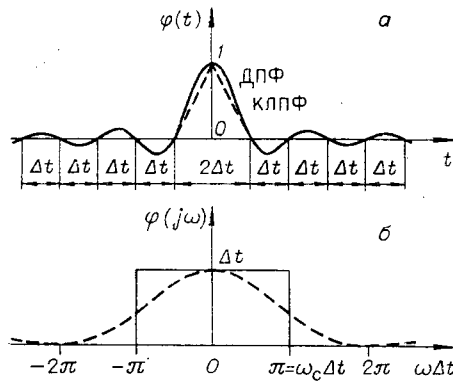


Рис. 4. Поведение аппроксимирующей функции метода ДПФ при разрыве первого рода.

Рис. 3. Базисные временные функции методов ДПФ и КЛПФ и их частотные спектры.

Поскольку в уравнении (16) под знак суммы входит выражение, аналогичное формуле ДПФ, можно формально считать, что метод КЛПФ вносит некоторые поправки в формулы ДПФ. Чтобы уяснить смысл поправки, вносимой вещественной функцией частоты перед знаком суммы, примем $h_0 = 0$ и $h_N = 0$. В этом случае формулы спектрального анализа имеют вид

$$\overline{H(j\omega)} = \varphi(j\omega) \sum_{k=1}^{N-1} h_k \exp(-j\omega k\Delta t), \quad (17)$$

где в случае КЛПФ

$$\varphi(j\omega) = 2 \frac{1 - \cos \omega\Delta t}{\omega^2 \Delta t}, \quad (18)$$

а в случае ДПФ

$$\begin{aligned} \varphi(j\omega) &= \Delta t \text{ при } |\omega| < \omega_c = \pi/\Delta t; \\ \varphi(j\omega) &= 0 \text{ при } |\omega| > \omega_c. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции (18) и (19), показанные на рис. 3, б, представляют частотные спектры треугольного импульса и соответственно функции вида $\sin \omega_c t / \omega_c t$ (рис. 3, а), т. е. функций времени, из линейных комбинаций которых строятся аппроксимирующие выражения в методах КЛПФ и ДПФ.

Поскольку частотный спектр (19) ограничен частотой ω_c , диапазон частот, для которого может быть применено ДПФ, ограничен сверху той же частотой. Практически при расчетах спектральных характеристик переходных процессов этот диапазон берется более узким, поскольку при близких к ω_c частотах расчеты по формулам ДПФ содержат значительные погрешности. Поэтому, если по кривой переходного процесса необходимо рассчитать частотные характеристики для некоторого диапазона, ограниченного сверху частотой ω_m , шаг дискретизации выбирается примерно в 2 раза меньше теоретического значения $\Delta t_m = \pi/\omega_m$.

Как следует из выражений (17), (18), метод КЛПФ не имеет ограничения по частоте. Практически такое ограничение возникает, будучи связанным с шагом дискретизации Δt , от величины которого зависит погрешности аппроксимации во временной области. Тем не менее, как показали результаты расчетов для ряда типовых кривых переходных процессов, метод КЛПФ позволяет вести расчет частотных спектров до частот, в 2—3 раза превышающих значение ω_c .

Поправки, вносимые функциями комплексной частоты при членах h_0 и h_N в формуле (16), обуславливают существенно лучшую точность метода КЛПФ в случаях, когда функция $h(t)$ имеет разрывы первого рода на концах отрезка $[t_0, t_N]$. Действительно, пусть функция $h(t) = 0$ при $t < 0$ и $h(t) = 1$ при $t > 0$ (рис. 4, сплошная линия).

При использовании метода ДПФ аппроксимирующее выражение во временной области имеет вид пунктирной кривой (см. рис. 4). Эту функцию можно представить в виде упругой нити, жестко закрепленной в точках, соответствующих значениям h_k . Резкие различия между соседними отсчетами функции $h(t)$ приводят к значительным погрешностям аппроксимации на промежутках между узловыми точками. Особенно значительные погрешности возникают в случаях разрывов первого рода (см. рис. 4). Между тем такого рода разрывы неизбежно возникают при расчетах текущих и мгновенных спектров.

Метод КЛПФ благодаря введению треугольных функций $v_0(t)$ и $v_N(t)$ на концах отрезка $[t_0, t_N]$ позволяет с высокой точностью учитывать разрывное поведение функции. В связи с этим не вносятся существенных искажений в рассчитываемые спектральные характеристики.

Таким образом, метод КЛПФ позволяет рассчитывать частотные спектры в более широких частотных диапазонах и с большей точностью.

При расчетах частотных спектров для равномерной сетки частот вычисления сумм в выражении (16) могут осуществляться с помощью алгоритмов БПФ. Соответствующий комбинированный алгоритм, обозначенный как БКЛПФ, записан на языке программирования ФОРТРАН-IV. Поскольку с помощью эффективной расчетной процедуры осуществляется выполнение основного объема вычислений, алгоритм БКЛПФ незначительно (примерно на 10—15%) увеличивает время вычислений по сравнению с алгоритмом БПФ.

Наряду с БКЛПФ для цифрового спектрального анализа вызванных реакций общего вида разработан алгоритм, реализующий прямые вычисления по формуле (16) и с помощью которого расчет текущих и мгновенных спектров осуществляется для логарифмических шкал частот.

Наглядность такой формы представления данных спектрального анализа показана на рис. 5, на котором изображена характерная картина текущих спектров (спектр амплитуд), рассчитанная по кривой усредненного вызванного светом потенциала мозга человека. Использование логарифмической шкалы частот позволяет охватить основные особенности изменения спектральных характеристик в широких диапазонах. При этом разрешающая способность в оценке параметров резонансных

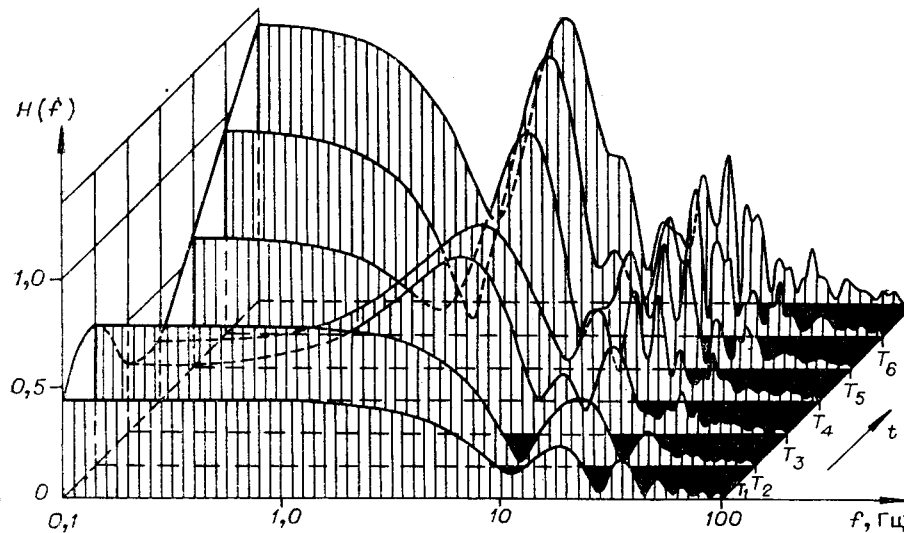


Рис. 5. Текущие амплитудные спектры, рассчитанные по кривой УВП мозга здорового человека

($T_m = m\Delta T$, где $\Delta T = 0,07$ с, шаг дискретизации при расчетах $\Delta t = 0,001$ с).

пиков спектральных характеристик сохраняется практически постоянной для всего диапазона. Следует отметить, что при использовании логарифмической шкалы частот и соответственно широких частотных диапазонов особенно важно введение поправок, вносимых методом КЛПФ.

Наличие картины изменения текущих спектров при интерпретации частотных спектров вызванных реакций позволяет, сопоставляя состав частотного спектра с характером изменения во времени анализируемой реакции, решать вопрос об информативности резонансных пиков в частотном спектре, их связи с детерминированными или случайными компонентами временного процесса.

ВЫВОДЫ

Метод КЛПФ вносит поправки в алгоритмы спектрального анализа на основе формул ДПФ, благодаря чему: 1) расширяется в область высоких частот диапазон, в котором могут быть рассчитаны спектральные характеристики, 2) повышается точность расчетов в области высоких частот, 3) понижаются до общего уровня погрешностей искажения спектральных характеристик, вызванные разрывами первого рода анализируемой функции при расчетах текущих и мгновенных спектров.

В то же время характер поправок таков, что сохраняется возможность выполнения основного объема вычислений для равномерной сетки частот с помощью алгоритмов БПФ.

В силу отмеченных факторов можно рекомендовать метод КЛПФ в качестве основы для алгоритмов цифрового спектрального анализа переходных процессов в биосистемах, которые целесообразно строить по равноотстоящим отсчетам для вызванных реакций общего вида и по неравноотстоящим отсчетам (согласно закону геометрической прогрессии) для переходных функций биосистем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glaser E. M., Ruchkin D. S. Principles of neurobiological signal analysis. N. Y., Acad. Press, 1976.
2. Basar E., Gbnder A., Özesmi C., Ungan P. Dynamics of brain rhythmic and evoked potentials.— "Biol. Cybernetics", 1975, vol. 20, p. 137.
3. Aunon J. I., McGillem C. D. Short term variations in the spectrum of visual evoked potentials.— "Proc. 29th Ann. Conf. Eng. Med. and Biol.", Boston, 1976, vol. 18, p. 280.
4. Кокс Дж. Р. Специализированные цифровые вычислительные машины в биологии.— В кн.: Вычислительные устройства в биологии и медицине. М., «Мир», 1967, с. 48.
5. Melkonian D. S. Frequency response analysis of evoked potentials of the visual system based on the operator representation of its structures.— In: Advances in Electrophysiology and — Pathology of the Visual System. Leipzig, VEB Georg Thieme, 1968, p. 203.
6. Мелконян Д. С., Газарян А. А. Исследование некоторых машинных алгоритмов спектрального анализа данных.— «Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук», 1978, т. 31, № 2, с. 64.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., «Мир», 1978.
8. Мелконян Д. С., Сааков В. И. О вычислении преобразований Фурье при расчетах переходных процессов и частотных характеристик линейных систем.— «Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук», 1971, т. 24, № 5, с. 24.
9. Stark L. Biological rhythms, noise and asymmetry in the pupil-retina control systems.— "Ann. N. Y. Acad. Sci.", 1962, vol. 92, art. 4, p. 1096.

Поступила в редакцию 23 апреля 1979 г.