УДК 519.68 : 681.51 : 007.5

Д. К. ТХАБИСИМОВ, Д. А. УСИКОВ
(Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ БЫСТРОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1. **Введение.** Обозначим через $f(x)$ неотрицательную ограниченную функцию на плоскости с интегрируемым квадратом, например изображение участка печатного текста, а через $v(x)$ — эталонное изображение (x — вектор с компонентами x_1 и x_2). Задача состоит в том, чтобы определить положение эталонного изображения $v(x)$ среди изображения $f(x)$. Допустимые преобразования эталонного изображения задаются группой G. Пусть $g \in G$ — элемент группы.

Корреляционный анализ заключается в подборе такого элемента g, чтобы достигался минимум суммы квадратов уклонений

$$S(g) = \int [f(x) - v(g^{-1}x) J^{-1/2}(g)]^2 \, dx; \tag{1.1}$$

здесь $J(g)$ — якобиан преобразования $x' = gx$. Якобиан вводится для сохранения интегральной энергии эталона при различных преобразованиях g:

$$\int J(g) v^2 (g^{-1}x) \, dx = \mathrm{const}.$$

Преобразование g, при котором достигается минимум (1.1), одновременно максимизирует нормированную корреляционную функцию

$$K'(g) = K(g) J^{-1/2}(g), \tag{1.2}$$

где

$$K(g) = \int v(g^{-1}x) f(x) \, dx \text{ — корреляционная функция.} \tag{1.3}$$

Известный случай преобразований — группа сдвигов плоскости; якобиан такого преобразования равен единице, нормированная корреляционная функция имеет вид

$$K(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x-a) f(x) \, dx. \tag{1.4}$$

При помощи интеграла (1.4) можно найти изображения, отличающиеся на сдвиг от эталона (по осям x_1 и x_2 одновременно). Фурье-преобразование интеграла (1.4) дает еще один способ вычисления корреляционного интеграла. (Известно, что на этом принципе основан голографический метод чтения печатных текстов [1, 2].) С помощью монохроматического источника света и системы линз осуществляется фурье-преобразование изображения; в свою очередь, корреляционная функция (1.4) может быть записана через фурье-образы:

$$K^*(t) = \bar{v}^*(t) f^*(t) \tag{1.5}$$

(черта сверху — знак комплексного сопряжения).

Вычисление корреляционной функции (1.4) на цифровых вычислительных машинах с помощью фурье-анализа (1.5) нашло особенно широкое применение после открытия БПФ — быстрых методов фурье-преобразования [3]. Если эталон и изображение заданы на сетке $N \times N$, то при применении методов БПФ для вычисления корреляционной функции требуется лишь порядка $N^2 \log_2 N$ арифметических операций против $\sim N^4$ операций, если интеграл (1.4) вычислять непосредственно.

На сетке $\sim 500\times500$ элементов выигрыш в быстродействии составляет ~ 10 тысяч раз. Однако если буква-эталон будет повернута относительно букв в тексте или если она будет другого размера, чем в тексте, корреляционный анализ по формуле (1.4) или (1.5) становится невозможным.

В настоящей работе отмечается тот факт, что для корреляционной функции (1.3) можно провести обобщенный фурье-анализ и после некоторых естественных приближений применить методы БПФ в случае, когда допускается более общая, чем сдвиги, группа преобразований над изображением. Рассмотрены группы поворотов, масштабных преобразований и сдвигов, а также их возможных комбинаций.

2. **Гармонический анализ корреляционной функции на однородных пространствах.** Пусть X — однородное пространство с группой движений G (G локально компактна). Рассмотрим на пространстве X неотрицательные ограниченные функции с интегрируемым квадратом.

Методы гармонического анализа функций на группах [4, 5] позволяют свести вычисление корреляционной функции (1.3) к интегральным преобразованиям, в качестве ядер которых берутся матричные элементы неприводимых унитарных представлений соответствующих групп [5]. Известно, что X можно реализовать как пространство левых классов смежности по стационарной подгруппе H некоторой точки $a_0 \in X$ [5]. Гармоническое разложение функций на однородном пространстве X сводится к разложению функций, определенных на группе G, постоянных на левых классах смежности по подгруппе H, т. е. таких, что $f(g)=f(gh)$. В связи с этим запишем корреляционную функцию (1.3) таким образом:

$$K(g) = \int_G f(h)\, v(g^{-1}h)\, dh, \tag{2.1}$$

где $g, h \in G$, $f(h)$ и $v(h)$ — функции, постоянные на левых классах смежности по подгруппе H, а мера dh — левоинвариантна на группе G.

Найдем аналог теоремы о свертке для корреляционного интеграла (2.1). Для этого разложим функции $f(g)$ и $v(g)$ по неприводимым унитарным представлениям группы G:

$$f(g) = \sum_{\alpha\in A_0} \sum_{i=1}^{d_\alpha} a_{i1}^{\alpha} t_{i1}^{\alpha}(g); \tag{2.2}$$

$$v(g) = \sum_{\beta\in A_0} \sum_{j=1}^{d_\beta} b_{j1}^{\beta} t_{j1}^{\beta}(g), \tag{2.3}$$

где

$$a_{i1}^{\alpha} = \int_G f(g)\, \overline{t_{i1}^{\alpha}(g)}\, dg; \tag{2.4}$$

$$b_{j1}^{\beta} = \int_G v(g)\, \overline{t_{j1}^{\beta}(g)}\, dg. \tag{2.5}$$

Здесь A_0 — множество попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений класса 1 [5], а $t_{i1}^{\alpha}(g)$ — матричные элементы столбцов, соответствующих базисным векторам l_1^{α}, таким, что $T_\alpha(h)\, l_1^{\alpha} = l_1^{\alpha}$, $h \in H$; d_α — размерность матрицы $\{t_{ij}^{\alpha}(g)\}$. Используя (2.2) — (2.5), вычислим коэффициент гармонического разложения интеграла (2.1). Подставим в равенство

$$c_{mn}^{\alpha} = \int_G K(h)\, \overline{t_{mn}^{\alpha}(h)}\, dh \tag{2.6}$$

вместо $K(h)$ выражение (2.1). Меняя порядок интегрирования в (2.6) и используя разложение

$$t^{\alpha}_{mn}(g_1g_2) = \sum_k t^{\alpha}_{mk}(g_1)\, t^{\alpha}_{kn}(g_2),$$

получим

$$c^{\alpha}_{mn} = \sum_k \int_G f(g)\, \overline{t^{\alpha}_{mk}(g)}\, dg \int_G v(g)\, \overline{t^{\alpha}_{kn}(g^{-1})}\, dg.$$

Из унитарности представления $\{t^{\alpha}_{ij}(g)\}$, а также из (2.4) и (2.5) следует, что

$$c^{\alpha}_{mn} = a^{\alpha}_{m1}\overline{b^{\alpha}_{n1}}$$

и разложение корреляционной функции запишется так:

$$K(g) = \sum_{m,n,\alpha} a^{\alpha}_{m1}\overline{b^{\alpha}_{n1}} t^{\alpha}_{mn}(g).$$

В силу того, что функции $f(g)$, $v(g)$ и матричные элементы $t^{\alpha}_{i1}(g)$ постоянны на левых классах смежности по подгруппе H, интегралы (2.4) и (2.5) можно переписать в виде интегралов по однородному пространству $X = G/H$ [5].

3. **Методы сведения интегральных преобразований к дискретному преобразованию Фурье.** С рассматриваемыми в данной работе группами связаны следующие интегральные преобразования:

Непрерывное преобразование Фурье

$$f^*(x) = \Phi_{x,y} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x,y)} f(y)\, dy, \tag{3.1}$$

где (x, y) — скалярное произведение.

Дискретное преобразование Фурье

$$f^*(n) = \Phi_{n,\varphi} f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} f(\varphi)\, d\varphi. \tag{3.2}$$

Дискретно-экспоненциальное преобразование Фурье

$$f^*(m) = D_{mn} f(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nm} f(n). \tag{3.3}$$

Обратное дискретно-экспоненциальное преобразование Фурье

$$f(n) = D^{-1}_{nm} f(m) = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nm} f(m). \tag{3.4}$$

Преобразование Меллина

$$f^*(R) = M_{R,\rho} f(\rho) = \int_0^{\infty} \rho^{iR-1} f(\rho)\, d\rho. \tag{3.5}$$

Преобразование Фурье — Бесселя

$$f^*(R) = B^n_{R,\rho} f(\rho) = \int_0^{\infty} J_n(\rho R)\, f(\rho)\, \rho d\rho. \tag{3.6}$$

Комплексно-сопряженные преобразования получаются заменой знака аргумента:

$$\overline{f}^*(x) = \overline{\Phi}_{x,y} f(y) = \Phi_{-x,y} f(y);$$

$$\overline{f}^*(n) = \overline{\Phi}_{n,\varphi} f(\varphi) = \Phi_{-n,\varphi} f(\varphi);$$

$$\overline{f}^*(R) = \overline{M}_{R,\rho} f(\rho) = M_{-R,\rho} f(\rho).$$

Интегралы во всех преобразованиях, кроме (3.2), берутся в бесконечных пределах; соответствующие им группы некомпактны. Для численных расчетов эти преобразования «компактифицируются» в процессе их сведения к дискретному преобразованию (3.3). При работе с дискретной информацией исходная функция $f(x)$ и ее спектр $f^*(y)$ задаются на конечном интервале множеством дискретных отсчетов. Далее переход осуществляется следующим образом. С прямым и обратным преобразованиями Фурье (3.1) можно связать дискретное преобразование Фурье [6, 7]. Имеют место соотношения:

$$f_p(j\Delta x) = \Delta y \sum_{n=0}^{M-1} f_p^*(n\Delta y)\, e^{i2\pi\frac{jn}{M}}, \quad j = 0, \ldots, M-1;$$

$$f_p^*(n\Delta y) = \Delta x \sum_{j=0}^{M-1} f_p(i\Delta x)\, e^{-i2\pi\frac{jn}{M}}, \quad n = 0, \ldots, M-1,$$

где

$$\begin{aligned} f_p(j\Delta x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\,[(j + lM)\,\Delta x]; \\ f_p^*(n\Delta y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^*\,[(n + KM)\,\Delta y] \end{aligned} \qquad (3.7)$$

и

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(y)\, e^{i2\pi xy} dy;$$

$$f^*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi xy} dx.$$

Функции f_p и f_p^* периодические с периодом $M\Delta x = 1/\Delta y$ и $M\Delta y = 1/\Delta x$ соответственно. Если исходная функция $f(i\Delta x)$ отлична от нуля в интервале $(0, M\Delta x)$ и вне этого интервала равна нулю, то, согласно (3.7), она заменяется периодической функцией f_p. Возникающие при этом эффекты приближения обсуждаются в работах [6, 7]. Аналогично осуществляется переход от преобразования (3.2) к (3.3).

Преобразование Меллина (3.5) сводится к одномерному преобразованию Фурье подстановкой $p = e^t$:

$$M_{R,\rho} f(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itR} f(e^t)\, dt = \Phi_{R,t} f(e^t).$$

Функция $f(\rho)$ считается отличной от нуля в интервале $(\rho_н, \rho_к)$; этот интервал разбивается на М равных интервалов по переменной t:

$$\rho_н = e^{t_0}; \quad \rho_к = e^{t_1};$$

$$\rho_j = \rho_н e^{\Delta t j}; \quad \Delta t = (t_1 - t_0)/M, \quad j = 0, \ldots, M-1.$$

Аналогично сводится к преобразованию Фурье обратное преобразование Меллина.

Преобразование Фурье — Бесселя (3.6) можно также свести к преобразованию Фурье. Действительно, произведем преобразование Меллина над (3.6) $(n > 0)$:

$$M_{r,R} B^n_{R,\rho} f(\rho) = \int_0^{\infty} R^{ir-1} dR \int_0^{\infty} J_n(R\rho)\, f(\rho)\, \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\infty} f(\rho)\, \rho^{-ir+1} d\rho \int_0^{\infty} J_n(\rho)\, \rho^{ir-1} d\rho = [\overline{M}_{r,\rho} f(\rho)\, \rho^2]\, [M_{r,\rho} J_n(\rho)]. \qquad (3.8)$$

Формула (3.8) показывает, что преобразование Фурье — Бесселя, как и преобразование Меллина, может быть вычислено быстро. При этом возможны различные способы расчета множителя $W_n(r) = M_{r,\rho}J_n(\rho)$ в (3.8).

Можно, например, вычислять $J_n(\rho)$ при помощи преобразования Фурье [5]

$$J_n(\rho) = \overline{\Phi}_{n,\theta} e^{i\rho \sin \theta}$$

и далее проводить преобразование Меллина, но расчеты показывают, что при новом вычислении для достижения удовлетворительной точности следует брать ~ 10000 точек разбиения по ρ; таким образом, этот способ требует большого времени счета.

Множитель $W_n(r)$ можно также вычислить, используя представление [8] $(n > 0)$:

$$M_{r,\rho}J_n(\rho) = 2^{ir-1}\Gamma\left(\frac{n+ir}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-ir}{2}+1\right); \tag{3.9}$$

гамма-функции вычисляются при помощи преобразования Фурье $(n > 0)$ [5]:

$$\Gamma(n+ir) = \Phi_{r,x} e^{-l^x + nx}. \tag{3.10}$$

Случай $n = 0$ при помощи рекуррентных соотношений для функции Бесселя сводится к случаю $n = 1$:

$$\int_0^\infty f(\rho) J_n(\rho r) \rho d\rho = r \int_0^\infty \frac{\mathcal{F}(\rho)}{\rho} J_1(\rho r) \rho d\rho,$$

где

$$\mathcal{F}(\rho) = \int_0^\rho f(s) s ds \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathcal{F}(\rho)}{\rho} = f(0).$$

Заметим, что нет необходимости определять (3.9) для всех n, поскольку можно воспользоваться рекуррентной формулой для гамма-функции: при n четном

$$\Gamma\left(\frac{2m+ir}{2}\right) = \left(m-1+i\frac{r}{2}\right)\ldots\left(1+i\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(1+i\frac{r}{2}\right);$$

при n нечетном

$$\Gamma\left(\frac{2m+1+ir}{2}\right) = \left(m-1+\frac{1+ir}{2}\right)\ldots\left(\frac{1+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+ir}{2}\right).$$

4. **Гармонический анализ на группах сдвигов, поворотов, масштабных преобразований и их комбинаций.** Не будем останавливаться на хорошо изученных случаях групп сдвигов и поворотов, которые сводятся к вычислению интегралов

$$K(a) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-a) f(x) dx$$

и

$$K(\psi) = \int_0^{2\pi} v(\varphi - \psi) f(\varphi) d\varphi$$

при помощи фурье-преобразований (3.1) и (3.2). Ниже будут исследованы обобщения фурье-анализа для более сложных групп преобразований.

А. *Масштабно-поворотные преобразования.* Проведем гармонический анализ корреляционной функции, используемой для распознавания изображений независимо от масштабных преобразований и поворота. Корреляционная функция, записанная в полярных координатах, имеет вид

$$K(R, \psi) = \int\limits_0^\infty \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi v\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \psi\right) f(\rho, \varphi).$$

Параметры группы $G : R$ — масштабный коэффициент, ψ — угол поворота. Мера $\rho d\rho$ неинвариантна относительно масштабных преобразований, поэтому, согласно (1.2), при корреляционном анализе следует искать максимум нормированной корреляционной функции:

$$K'(R, \psi) = \int\limits_0^\infty \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{R} v\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \psi\right) f(\rho, \varphi). \tag{4.1}$$

Так как группа G представляет собой прямое произведение мультипликативной и аддитивной групп, то для проведения гармонического анализа следует применить дискретное преобразование Фурье для аргумента ψ и преобразование Меллина для аргумента R. Применим дискретное преобразование Фурье к обеим частям (4.1):

$$K^{*\prime}(R, n) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{R} \bar{v}^*\left(\frac{\rho}{R}, n\right) f^*(\rho, n) \rho d\rho. \tag{4.2}$$

После применения преобразования Меллина к (4.2) окончательно получается фурье-спектр $K'(r, n)$, выраженный через произведение спектров v и f:

$$K^{*\prime}(r, n) = \left[M_{r,\rho} \bar{v}^*(\rho, n) \rho\right] \left[\overline{M}_{r,\rho} f^*(\rho, n) \rho\right].$$

Б. *Сдвиги и масштабные преобразования.* В том случае, когда одновременно действуют группа сдвигов и группа масштабных преобразований изображений на плоскости, изучается нормированная корреляционная функция вида

$$K(a_1, a_2, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(g^{-1}x) f(x)\, dx, \tag{4.3}$$

где

$$g(a_1, a_2, b_1, b_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + b_1 \\ a_2 x_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Группа G, действующая на плоскости, представляет собой прямое произведение двух групп линейных преобразований прямой, поэтому без ограничения общности можно изучать разложение корреляционной функции на группе, действующей на прямой. Группа линейных преобразований прямой является скрещенным произведением аддитивной группы вещественных чисел (R) и мультипликативной группы (R_+) [5], поэтому гармонический анализ проводится последовательным применением (3.1) и (3.5) к функции (несущественные для разложения нормировочные множители опущены)

$$K(a, b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v\left(\frac{x}{a} + b\right) f(x)\, dx. \tag{4.4}$$

Преобразование Фурье (3.1) приводит (4.4) к виду

$$K(a, y) = v^*(y) \bar{f}^*(ay), \tag{4.5}$$

где

$$v^*(y) = \Phi_{y,x} v(x); \quad \bar{f}^*(ay) = \overline{\Phi}_{ay,x} f(x).$$

В данном мультипликативном виде $K(a, y)$ легко вычисляется, однако присутствие масштабного множителя в правой части разложения (4.5) приводит к необходимости интерполяции функции $\bar{f}^*(ay)$ при ее определении на дискретной сетке. Эта трудность устраняется, если применить преобразование Меллина к (4.5).

Действительно, разобьем прямую линию на орбиты, однородные относительно R_+ [9]. Определим на каждой из орбит фурье-спектр корреляционной функции (4.5) следующим образом:

$$K(a, y) = \begin{cases} K(a, y), & y > 0; \\ K(a, -|y|), & y < 0; \\ K(a, 0), & y = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Спектральное разложение функции (4.6) на полупрямых $y > 0$ и $y < 0$ вычисляется с помощью преобразования (3.5) и имеет вид

$$S(\omega, \nu) = [\bar{M}_{\omega+\nu, y} v^*(y)][M_{\omega, y} \bar{f}^*(y)] \tag{4.7}$$

для $y > 0$ и

$$S(\omega, \nu) = [\bar{M}_{\omega+\nu, |y|} v^*(-|y|)][M_{\omega, |y|} \bar{f}^*(-|y|)] \tag{4.8}$$

для $y < 0$. (Следует заметить, что $K(a, 0) = v^*(0)\bar{f}^*(0)$). Таким образом, здесь так же, как и в предыдущем случае (см. п. 4, А), удается проводить вычисления (4.7) и (4.8) с помощью БПФ, не прибегая к интерполяции.

В. *Группа движений плоскости.* Корреляционная функция на группе движений плоскости имеет вид

$$K(a, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} v((x-a)_{-\alpha}) f(x)\, dx, \tag{4.9}$$

где a — вектор сдвига; α — угол поворота; x_α обозначает поворот вектора x на угол α. В работе [5] построены неприводимые представления группы М (2), причем при разложении регулярного представления на неприводимые используется преобразование Фурье — Бесселя (3.6); на этом основании гармонический анализ корреляционной функции (4.9) проводится следующим образом [10]. Вначале применяется непрерывное преобразование Фурье

$$K^*(y, \alpha) = \Phi_{y, a} K(a, \alpha),$$

которое разлагает (4.9) в произведение

$$K^*(y, \alpha)\, \bar{v}^*(y_{-\alpha}) f^*(y). \tag{4.10}$$

Далее в (4.10) аргумент y записывается в полярных координатах (r, ψ):

$$K^*(r, \psi, \alpha) = \bar{v}^*(r, \psi - \alpha) f^*(r, \psi). \tag{4.11}$$

Применение двух дискретных преобразований Фурье $\Phi_{n, \alpha}$ и $\Phi_{m, \psi}$ к функции (4.11) дает

$$K^*(r, m, n) = \bar{v}^*(\bar{r}, \bar{n}) \bar{f}^*(r, m+n). \tag{4.12}$$

Выражение (4.12) может быть записано затем через преобразование Фурье — Бесселя, если заметить [10], что

$$\Phi_{n,\psi} \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\varphi - \psi)} d\varphi f(\rho, \varphi) = 2\pi i^n \Phi_{n,\varphi} B^n_{r,\rho} f(\rho, \varphi). \tag{4.13}$$

Используя (4.13), окончательно получаем

$$K^*(r, m, n) = 2\pi v^*(r, n) f^*(r, m+n)$$

или

$$K^*(r,\ l-n,\ n)=2\pi v^*(r,\ n)f^*(r,\ l),$$

где

$$l=m+n;$$

$$K^*(r,m,n)=\Phi_{n,\alpha}\Phi_{m,\varphi}B^m_{r,\rho}K(\rho,\varphi,\alpha);$$

$$v^*(r,n)=\Phi_{n,\varphi}B^n_{r,\rho}v(\rho,\varphi);$$

$$f^*(r,\ m+n)=\Phi_{m+n,\varphi}B^{m+n}_{r,\rho}f(\rho,\varphi).$$

Г. *Движения плоскости и однородные масштабные преобразования.* Если допускать кроме движений плоскости также и масштабные преобразования изображений, то соответствующая нормированная корреляционная функция примет вид

$$K(R,a,\alpha)=\frac{1}{R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(g^{-1}x)f(x)\,dx, \tag{4.14}$$

где $g^{-1}x=((1/R)x-a)_{-\alpha}$, а R — коэффициент масштабного преобразования. Как показано в работе [11], спектр функции (4.14) имеет вид

$$S(\omega,\ \nu,\ m,\ n)=\pi P(\omega,\ \nu,\ m,\ n)f^*(\omega,\ n)v^*(\nu,\ m), \tag{4.15}$$

где

$$P(\omega,\nu,m,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1+i\frac{\omega+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-i\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-i\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-i\frac{m+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1+i\frac{\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1+i\frac{\nu}{2}\right)}; \tag{4.16}$$

$$f^*(\omega,\ n)=\overline{M}_{\nu,\rho}\Phi_{m,\varphi}f(\rho,\ \varphi);$$

$$v^*(\nu,\ m)=M_{\omega,\rho}\Phi_{n,\varphi}v(\rho,\ \varphi);$$

$$S(\omega,\ \nu,\ m,\ n)=\overline{M}_{\nu+\omega,R}M_{\omega,r}\Phi_{m+n,\psi}\overline{\Phi}_{n,\alpha}[RK(R,\ r,\ \psi,\ \alpha)]; \tag{4.17}$$

$(\rho,\ \varphi)$ — полярные координаты на плоскости, $a=(a_1,\ a_2)$; $a_1=r\cos\psi$; $a_2=r\sin\psi$. Преобразования, с помощью которых выполняется разложение (4.15)—(4.17), осуществляются с помощью БПФ в случае вычислений на конечных сетках, причем интерполяция не требуется. При вычислении коэффициентов (4.16) следует пользоваться представлением (3.10). Отметим также, что корреляционную функцию (4.9) (а также (4.14)) можно вычислять и с привлечением лишь непрерывного преобразования Фурье (3.1); при этом последовательно определяются корреляционные функции для различных ориентаций эталона. Однако осуществление поворотов эталона в декартовой сетке требует интерполяции.

Заключение. Использование методов гармонического анализа и быстрых преобразований для распознавания изображений, заданных на дискретной сетке $N\times N$, дает единообразный и экономный метод вычисления корреляционных интегралов. Так, для распознавания изображений независимо от их сдвигов и поворотов требуется лишь $\approx N^3\log_2 N$ операций для вычисления функции (4.9) против $\sim N^5$, если интегралы в (4.9) вычислять для каждого g прямыми методами. На сетке $\sim 500\times\times 500$ элементов выигрыш в быстродействии составляет примерно 10 тыс. раз.

Следует также отметить, что гармонический анализ на группах является теоретическим обоснованием голографических методов вычисления корреляционных интегралов. Весовые функции типа $W_n(r)=M_{r,\rho}J_n(\rho)$ в (3.8) реализуются в виде комплексных голографических фильтров, синтезируемых на ЭВМ.

Методы экспоненциального отсчета аргумента в преобразовании Меллина обсуждаются в работах [12, 13].

Авторы выражают благодарность М. Л. Аграновскому, Р. Д. Баглаю, Л. С. Гурину, Б. И. Колосову, Т. Э. Кренкелю за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Розенфельд А.** Распознавание и обработка изображений. М., «Мир», 1972.
2. **Вьено Ж.-Ш., Смигильский П., Руайе А.** Оптическая голография. Развитие и применение. М., «Мир», 1973.
3. **Cooley J. V., Tuckey J. V.** An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.— "Mathem. Comput.", 1965, vol. 19, p. 297—301.
4. **Хьюит Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М., «Наука», 1976; Т. 2. М., «Мир», 1975.
5. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
6. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Спектральный анализ случайных процессов. М., «Энергия», 1974.
7. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М., «Сов. радио», 1975.
8. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., «Мир», 1974.
9. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления. М., «Наука», 1970.
10. **Усиков Д. А.** Применение абстрактного гармонического анализа для быстрого распознавания изображений.— Препринт № 335. М., изд. ИКИ АН СССР, 1977.
11. **Тхабисимов Д. К.** Быстрый корреляционный анализ на группе движений и однородных масштабных преобразований плоскости ($M(2) \times R_+$). Препринт № 367. М., изд. ИКИ АН СССР, 1977.
12. **Casasent D., Psaltis D.** Position, rotation and scale invariant optical correlation.— "Appl. Opt.", 1976, vol. 15, N 7, p. 1795—1800.
13. **Casasent D., Psaltis D.** Space-bandwith product and accuracy of the optical Mellin transform.— "Appl. Opt.", 1977, vol. 16, N 6, p. 1472.

Поступила в редакцию 24 ноября 1978 г.

УДК 535.317.1 : 519.272.13

Ю. А. БЫКОВСКИЙ, А. С. ЗАЙЦЕВ, А. И. ЛАРКИН, А. А. МАРКИЛОВ, С. Н. СТАРИКОВ

(Москва)

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Определение параметров изображений объектов, представляющих собой совокупность отдельных элементов, является распространенной задачей во многих практических приложениях. Как правило, к основным искомым характеристикам относятся число элементов (общее или на участках изображения), средний размер элементов и распределение элементов по размерам. В работах [1, 2] показана целесообразность использования оптических методов, в частности, базирующихся на корреляционном анализе, для получения указанных параметров объектов, представленных в виде двухградационных изображений. Однако к настоящему времени задача не полностью решена, поскольку имеется потребность в сокращении времени обработки результатов, получаемых непосредственно оптическим путем, и в ослаблении ограничений на форму элементов, образующих анализируемый объект.

В настоящей работе рассматривается возможность получения элементных характеристик объектов, представленных в виде двухградаци-